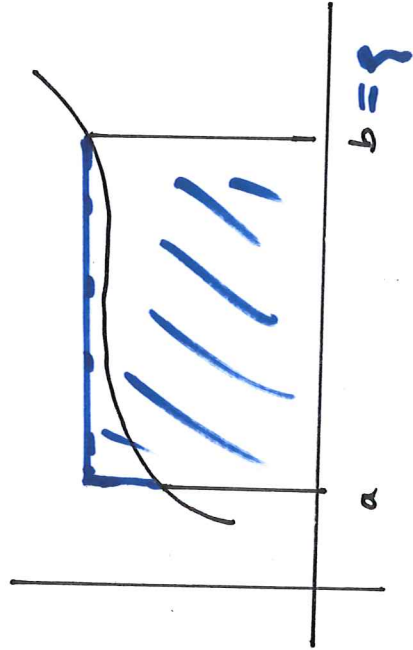
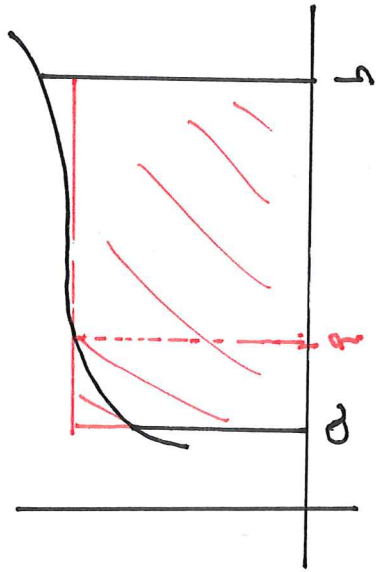
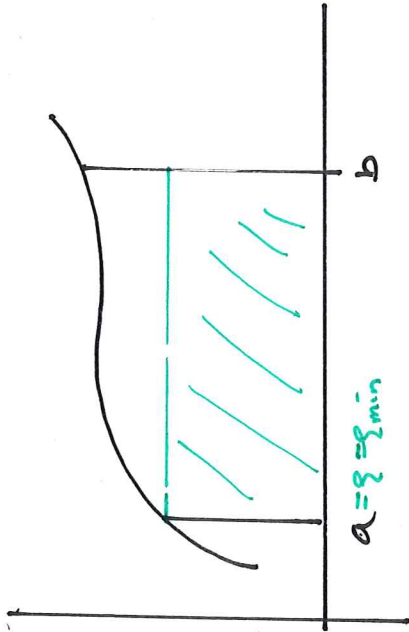
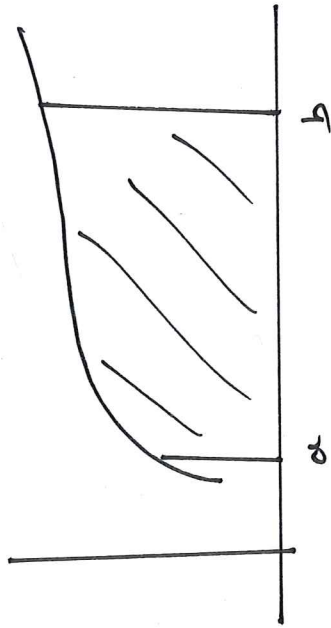


§ 6 Integration

Motivation: Flächeninhalt des Gebietes zwischen der x-Achse und dem Graph von $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$



Idee: 1) Zerlege das Intervall $[a, b]$ in kleine

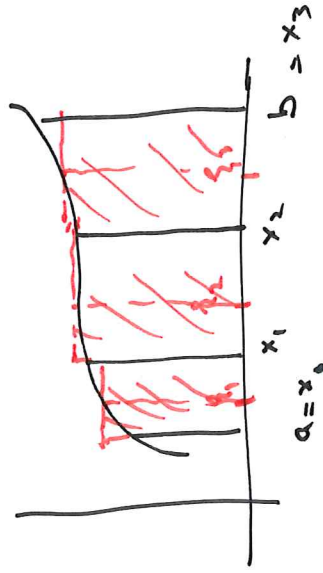
Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

2) wähle in jedem Intervall I_k einen Punkt ξ_k aus

3) Auf jedem Teilintervall I_k , ersetze f durch die konstante $f(\xi_k)$

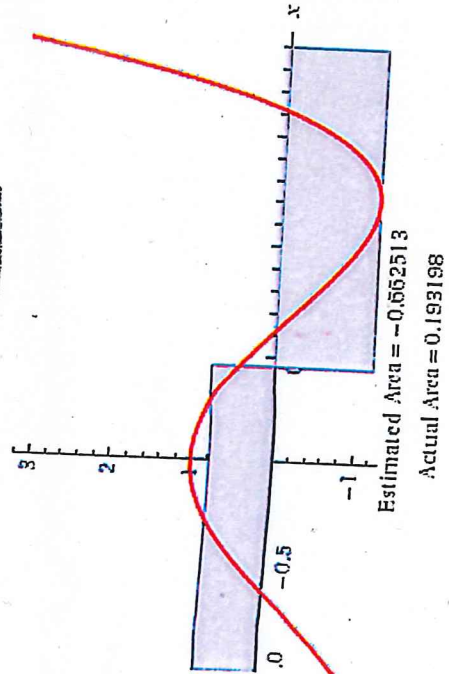
4) Bilde die Summe der Flächeninhalte der auf diese Weise erhaltenen Rechtecke.

$$A \sim \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$



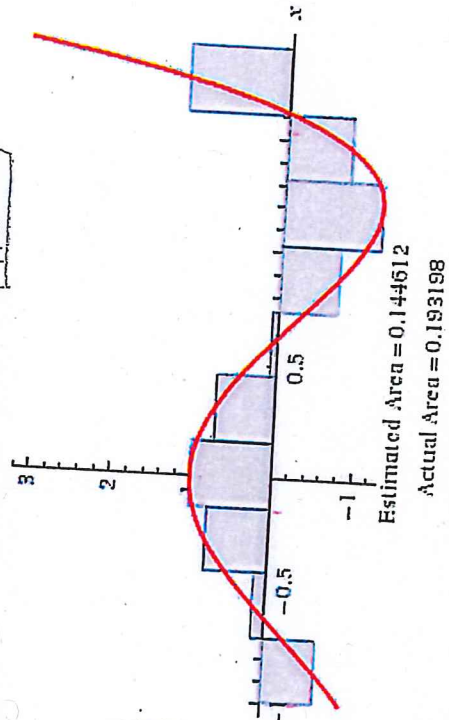
$n=2$

$$x^4 - 3x^2 + 1$$



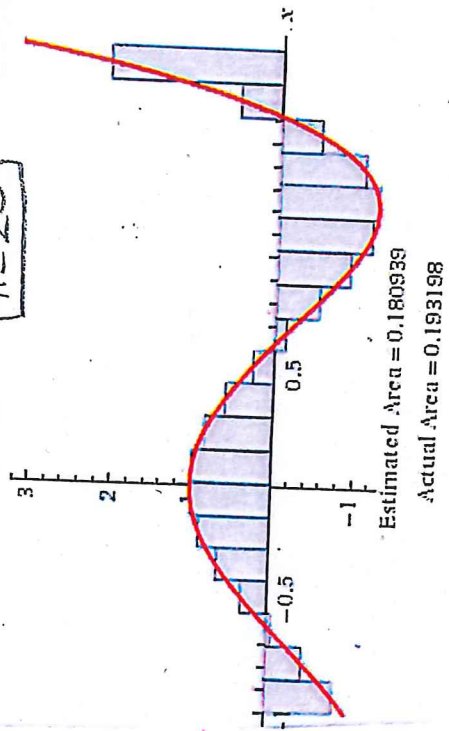
$n=10$

$$x^4 - 3x^2 + 1$$



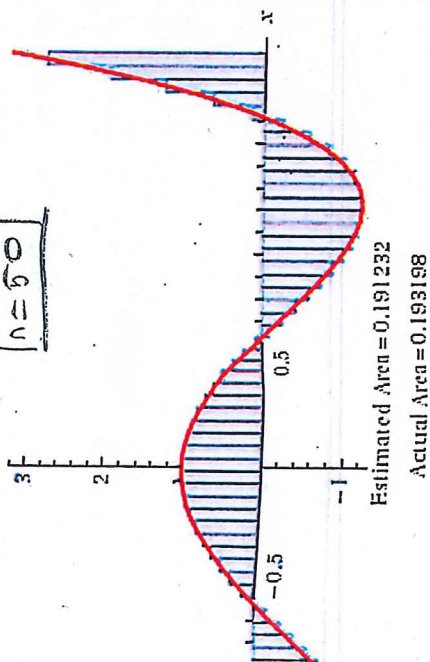
$n=20$

$$x^4 - 3x^2 + 1$$



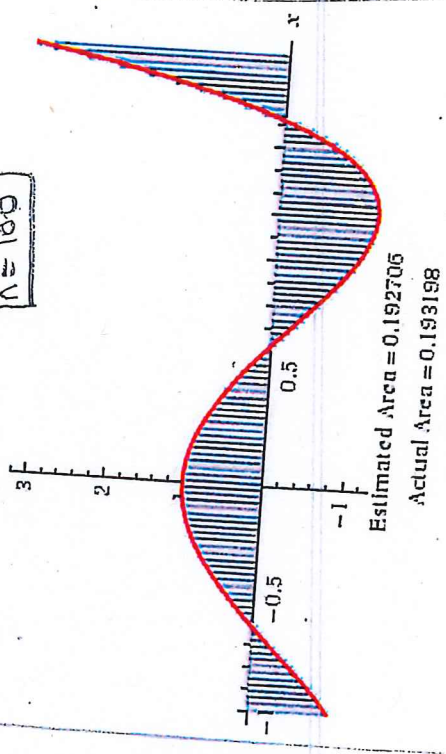
$n=50$

$$x^4 - 3x^2 + 1$$



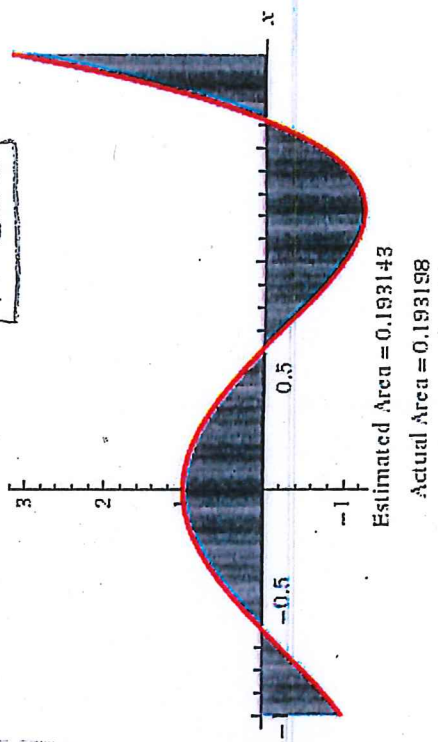
$n=100$

$$x^4 - 3x^2 + 1$$



$n=300$

$$x^4 - 3x^2 + 1$$



Generated using

Wolfram Math World
Riemann Sum

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Defn Eine $F \in C^1([a, b])$ heißt Stammfunktion zu f

falls gilt $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$

Satz Sind $F, G \in C^1([a, b])$ Stammfunktionen zu f , so gilt $F - G = \text{konstant}$.

Defn Eine Partition (Zerlegung) eines Intervalls $I = [a, b]$ ist eine endliche Menge $P := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$
 $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

$\mathcal{P}(I) := \{P \subset I \mid a, b \in P, P \text{ ist endlich}\} = \text{Die Menge aller Partitionen.}$

$\delta(P) := \max_{1 \leq i \leq n} \{ |x_i - x_{i-1}| \}$ feinheit der Partition

Sei $\xi_k \in I_k := [x_{k-1}, x_k]$ die zwischen Punkte, (stützstellen)

Jede Summe der Form $S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1})$

nennt man eine Riemannsche Summe der Zerlegung P und $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

Defn. Die Summe:

$$\underline{S}(f, P) = U(f, P) := \sum_{k=1}^n \left(\frac{Df}{I_k} \right) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

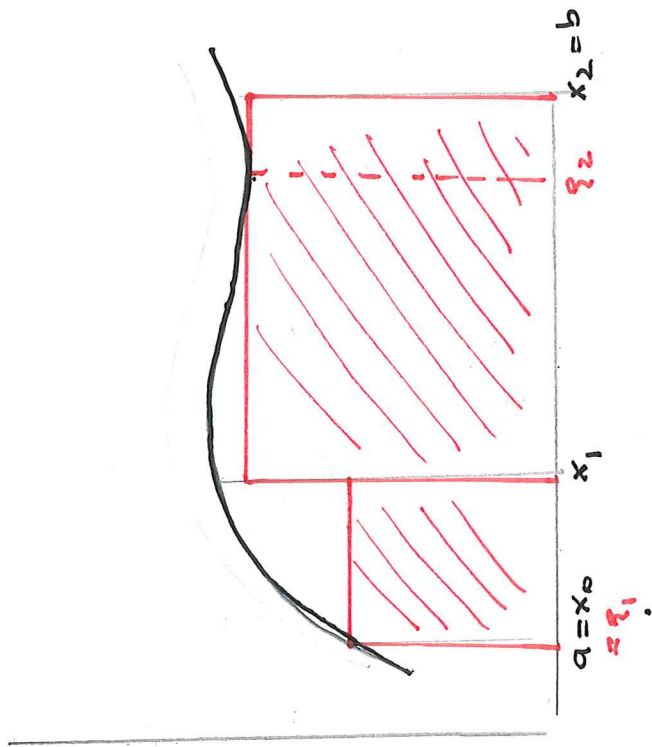
heisst die (Riemannsche) Untersumme von f zur

Partition $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$.

und

$$\bar{S}(f, P) = O(f, P) := \sum_{k=1}^n \left(\frac{Sf}{I_k} \right) (x_k - x_{k-1})$$

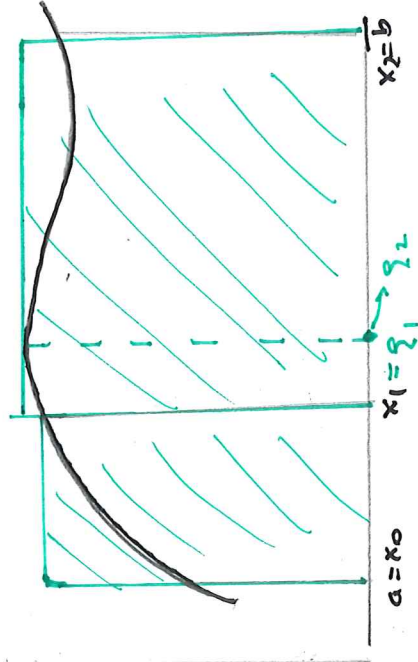
heisst die Obersumme von f zur P .



$$P = \{a = x_0, x_1, x_2\}$$

$$z = \{z_1 = a, z_2\}$$

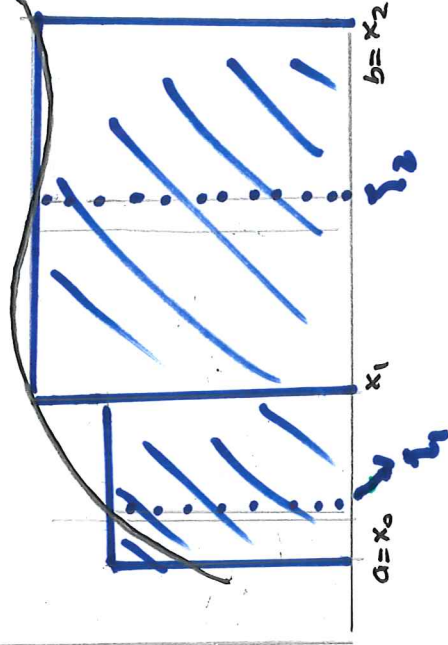
Minimum punkte



$$P = \{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$$

$$z = \{z_1 = x_1, z_2\}$$

Maximum punkte



$$P = \{a = x_0, x_1, x_2\}$$

$$z = \{z_1, z_2\}$$

$$z(f, P) = z(f, P, z) \leq z(f, P, z) = \bar{z}(f, P)$$

Bmk = Aus der Definitionen folgt direkt dass
für eine feste Zerlegung P gilt stets

$$\underline{S}(f, P) \leq S(f, P, \xi) \leq \bar{S}(f, P)$$

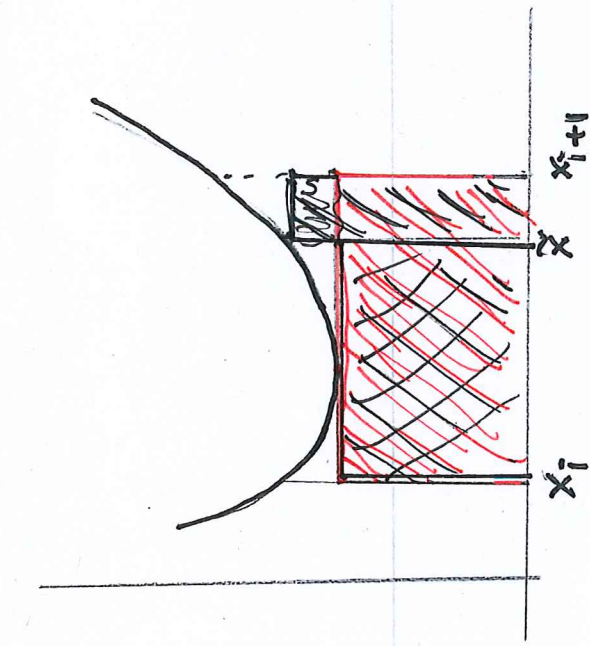
Lemma. (Lemma 2.3 D. Salomon skript).

Sei $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

1) Für zwei Partitionen $P, Q \in \mathcal{P}(I)$ gilt

$$P \subset Q \Rightarrow \underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q) \leq \bar{S}(f, Q) \leq \bar{S}(f, P)$$

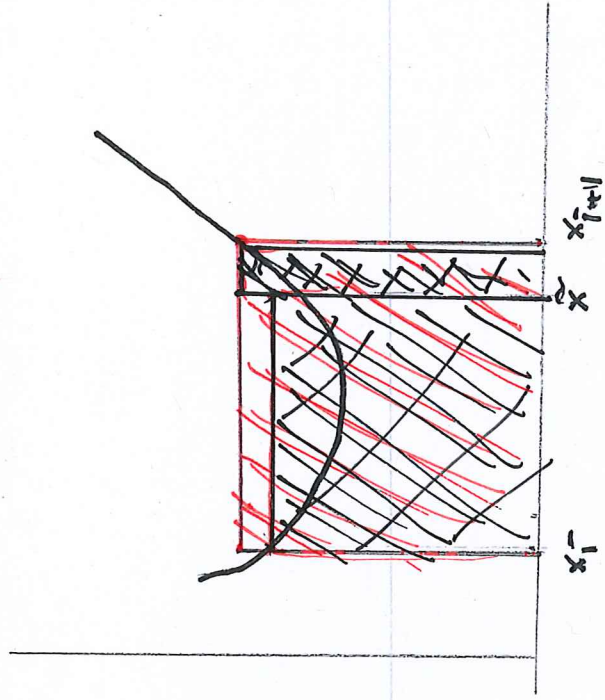
$$2) \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f, P) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \bar{S}(f, P)$$



$$P = \{x_0, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\}$$

$$Q = \{x_0, \dots, x_i, \tilde{x}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$$

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q)$$



$$P = \{x_0, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\}$$

$$Q = \{x_0, \dots, x_i, \tilde{x}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$$

$$\overline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, Q)$$

Defn 6.2.2. 1) Für beschränktes $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

bezeichnen

$$\int_a^b f(x) dx := \sup \{ \Sigma(f, P) \mid P \in \mathcal{P}(I) \}$$

das untere - Riemann Integral von f .

und

$$\int_a^b f(x) dx := \inf \{ \Sigma(f, P) \mid P \in \mathcal{P}(I) \}$$

das obere - Riemann Integral von f falls

2) f heisst "über $[a, b]$ Riemann-integrierbar" falls

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

In diesen Fall heißt die Zahl

$$A := \int_a^b f(x) dx \quad \text{das Riemann-Integral von } f \text{ über dem Intervall } [a, b]$$

Bmk: Das Symbol $\int$ ist ein Stützzeichen S für "Summe"

$$\int_a^b f(x) dx :$$

b = obere Grenze
(eine Zahl)

a = untere Grenze (eine Zahl)

f = Integrand (eine Funktion)

x = Integrationsvariable

d = ein Symbol

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) (x_i - x_{i-1})$$

R-Summe

$$\Delta x = (x_i - x_{i-1})$$

in

Bsp 6-2.2 1) Sei $c \in \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ die konstante Funktion $x \mapsto c$.

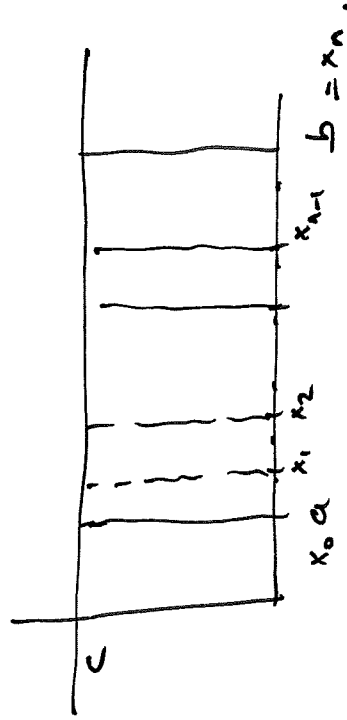
mit dem Wert c

Dann, gilt

$$\underline{S}(f, P) = \overline{S}(f, P) = c(b-a)$$

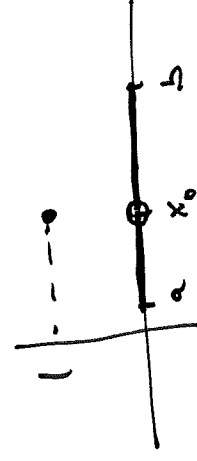
$\Rightarrow f$ ist R. integrierbar

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b-a).$$



$x \neq x_0$, $x_0 \in [a, b]$.

$$\textcircled{2}. \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x_0 \\ 1 & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$



$$\text{Dann gilt } \underline{S}(f, P) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{P}(I) \Rightarrow \sup \underline{S}(f, P) = 0.$$

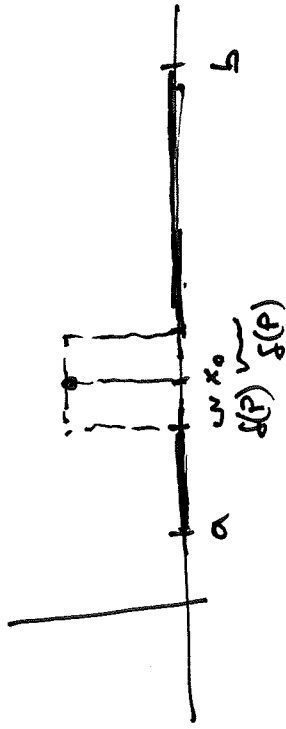
$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = 0$$

~~Funktion ist R. integrierbar~~

Für jede Partition P mit Feinheit $\delta(P)$ gilt

$$0 < \bar{S}(f, P) \leq 2 \delta(P)$$

z.B. sei $P_n = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right), \dots, b \right\}$.



$$\Rightarrow f(P) = \frac{b-a}{n}$$

$$0 \leq \inf \bar{S}(f, P) \leq \inf_P 2 \frac{(b-a)}{n}.$$

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

$$\Rightarrow \inf \bar{S}(f, P) = 0. \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = 0$$

ist $\mathbb{R}$ -integ.

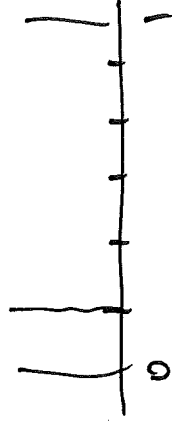
$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

$$③ \quad f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathbb{Q} = \text{Rationale Zahlen.}$$

$$= \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sei P eine Partition von $[0,1]$

$$\underline{S}(f, P) = 0$$



$$\overline{S}(f, P) = 1.$$

$$\int_a^b f \, dx = 0 \neq$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = 1 \Rightarrow f \text{ ist nicht}$$

$\mathbb{R}$ -integrierbar.

Kriterien für Integrierbarkeit

Satz (Lemma 2.8 in Solomon's script). (Riemannsche Kriterium).

Eine beschränkte Funktion f auf $[a, b]$ ist genau
integrierbar wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists Q \in \mathcal{P}(I) \quad \text{mit} \quad \overline{S}(f, Q) - \underline{S}(f, Q) < \varepsilon.$$

Satz 6.2.1 f monoton $\Rightarrow f$ ist integrierbar

Satz 6.2.2. f stetig $\Rightarrow f$ ist integrierbar

Beweis (a) f ist integrierbar

(b) $\forall \varepsilon > 0, \exists Q \in \mathcal{P}(I)$:

$$\underline{S}(f, Q) - \overline{S}(f, Q) < \varepsilon.$$

(a) $\Rightarrow$ (b): f ist integrierbar. $\int_a^b f(x) dx$

$$\Rightarrow A = \int_a^b f(x) dx = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f, P) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f, P) = \int_a^b f(x) dx$$

Nach defn von $\sup$: folgt dass ein Partikel $P_1 \in \mathcal{P}(I)$ gibt so dass

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{S}(f, P_1)$$

Nach defn von $\inf$: folgt dass ein Part. $P_2 \in \mathcal{P}(I)$ existiert so dass

$$\overline{S}(f, P_2) \leq A + \frac{\varepsilon}{2}$$

Definiere $Q := P_1 \cup P_2$ dann $P_1 \subset Q, P_2 \subset Q$.

Nach Lemma 2.3 folgt

$$\underline{S}(f, P_1) \leq \underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P_2)$$

immer immer

$$\boxed{A - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{S}(f, P_1) \leq \underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P_2) \leq A + \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, Q) \leq A + \varepsilon/2.$$

$$\Rightarrow \underline{S}(f, Q) - \overline{S}(f, Q) < \varepsilon$$

$$(b) \Rightarrow (a) \quad (a) \Rightarrow (b) \quad \exists \delta \in \mathcal{O}(I) : 0 < \delta < \varepsilon \quad \underline{S}(f, Q) - \overline{S}(f, Q) < \varepsilon.$$

$$(a) \quad f \text{ ist integrierbar} \iff \int_a^b f(x) dx = \inf \underline{S} = \sup \overline{S} = \int_a^b f(x) dx.$$

For all $P \in \mathcal{O}(I)$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P) \leq \int_a^b f(x) dx$$

$$\Rightarrow \forall P \in \mathcal{P}(I)$$

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b x_P(x) dx$$

$$\leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i$$

hence

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall P \in \mathcal{P} \text{ s.t. } \max \Delta x_i < \delta \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i \right| < \epsilon \quad (\text{Annahme (a)})$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall P \text{ s.t. } \max \Delta x_i < \delta \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i \right| < \epsilon$$

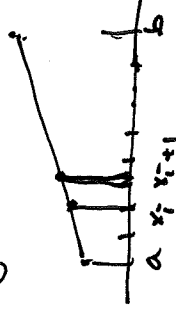
Satz 6.2.1 f nonotone $\Rightarrow f$ ist integrierbar.

Beweis Sei f non- steigend, sei $P_n \in \mathcal{P}(I)$ eine Uniform Partition.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad x_i = a + \left(\frac{b-a}{n} \right) i, \quad 0 \leq i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) - f(x_i)) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) - f(x_i)] \underbrace{\Delta x_i}_{\frac{b-a}{n}}$$

non-
steigend



$$= \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{f(x_{i+1}) - f(x_i)}$$

$$\underbrace{\left(\cancel{f(x_0)} - \cancel{f(x_1)}\right) + \left(\cancel{f(x_1)} - \cancel{f(x_2)}\right) + \dots + \left(\cancel{f(x_{n-1})} - \cancel{f(x_n)}\right)}_{= f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)}$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right) [f(b) - f(a)]$$

Wenn man $N \in \mathbb{N}$ wählen so dass $f(b) - f(a) \left(\frac{b-a}{N}\right) < \varepsilon$,
 $0 < \varepsilon < \delta$

$\exists P_N \subseteq [a, b]$ so dass $\bar{S}(f, P_N) - \underline{S}(f, P_N) < \varepsilon$,
 $0 < \varepsilon < \delta$

$\Rightarrow f$ ist integrierbar wegen Riem. Kriterium.

$\square$

Bsp 7

Kor (Satz 6.2.3) Seien $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte und integrierbare Funktion. Sei $\{P^n\}$ eine Folge

von Partitionen des Intervalls $[a, b]$ mit $\delta(P^n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $\{\xi^n\}$ eine Folge wohl von Zwischenpunkten zur Partition P^n . Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P^n, \xi^n)$$

z.B. Uniforme Partitionen $P_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$
 $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

ist eine Folge von Partitionen, mit $\delta(P_n) = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.

Bsp. $\int_0^1 (x^2 - x) dx = ?$

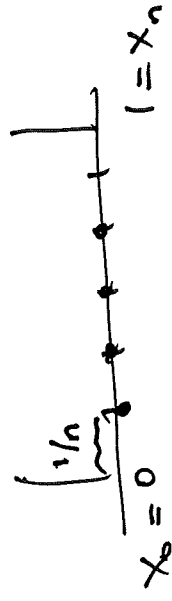
$$f = x^2 - x$$

$$[a, b] = [0, 1]$$

f stetig $\Rightarrow f$ ist integrierbar.

Wir werden hier benutzen, mit $P^{(n)}$ unform Partitionen.

mit $x_k^{(n)} = \frac{k}{n} \quad k=0, \dots, n.$



Dann $S(P^n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

Wir wählen die Zwischenpunkte als $\xi_k^{(n)} := \frac{k}{n}$ (Sie sind die rechten Endpunkte des Intervalls $k=1, \dots, n$)

$$\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$$

$$S(f, P^n, \xi^n) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k^{(n)}) \underbrace{(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)})}_{\frac{1}{n}}$$

$$= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} - \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

$$S(f, P, \xi^n) = \frac{1}{n^3} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n^2} - \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\left[\int_0^1 (x^2 - x) dx = -\frac{1}{6} \right]$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -1/6.$$