$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkte funktion.

Sei $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b\}$ eine Partition

$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n\}$ zwischen punkte, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] = I_k$

Defn: $S(f, P, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ Riemannsche Summe zu P, ξ

$\underline{S}(f,P) := \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{Inf}_{I_k} f\right)(x_k - x_{k-1})$ Untersumme von f zu P

$\overline{S}(f,P) := \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{Sup}_{I_k} f\right)(x_k - x_{k-1})$ Obersumme von f zu P.

Lemma Für $P, Q \in \mathcal{P}(I)$ gilt

- $P \subset Q \Rightarrow \underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,Q) \leq \underline{S}(f,P)$
- $\sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f,P) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f,P)$

Defn

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \operatorname{Sup}\{\underline{S}(f,P) \mid P \in \mathcal{P}(I)\}$$

$\uparrow$

Untere - Riemann Integral von f

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \operatorname{Inf}_{P \in \mathcal{P}(I)} \{\overline{S}(f,P)\}$$

Obere - Riemann Integral von f

f heisst über $[a, b]$ Riemann- integrierbar falls

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

In diesem Fall, heisst die Zahl $\int_a^b f(x)\,dx$

das Riemann Integral von f über dem Interval $[a, b]$

Kriterien für Integrierbarkeit

Satz Eine beschränkte f auf $[a,b]$ ist integrierbar
$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 : \exists Q \in \mathcal{P}(I)$ mit $\overline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,Q) < \varepsilon$

Satz f ist monotone $\Rightarrow$ f ist integrierbar

Satz f ist stetig $\Rightarrow$ f ist integrierbar

Satz: Sei $\{P^{(n)}\}$ eine Folge von Partitionen des Intervals $[a,b]$ mit $\delta(P^n) \to 0$. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte und integrierbare Funktion.
Sei $\{\xi^{(n)}\}$ eine feste Wahl von Zwischen Punkte zu $P^{(n)}$

Dann ist
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)})$$

Bsp. $f(x) = x^2 - x$, stetig $\Rightarrow$ integrierbar über $[0,1]$

$$\int_0^1 (x^2 - x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum f(\xi_k^{(n)})(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) = -\frac{1}{6}$$

wobei $P^{(n)}$ uniform Partition mit $x_k^{(n)} = \frac{k}{n}$ $k = 0, \dots, n$

$\xi_k^{(n)} = \frac{k}{n}.$

§6.3 Integrationsregeln, Haupsatz.

Satz 6.3.1 (Monotie des R-Integrals)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, R-integrierbar mit $f \leq g$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Satz 6.3.2. (Linerität des R-integrals).

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$. zwei R-integrierbare Funktionen.

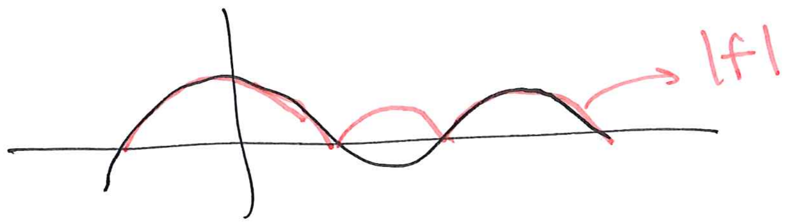
Dann ist die Funktion $\alpha f + \beta g$ über $[a, b]$ integrierbar und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx.$$

Kor 6.3.1 (Standardabschätzungen)

Sei f integrierbar über $[a,b]$. Dann ist $|f|$ R-integrierbar und

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx . \longrightarrow$$ „Kontinuierliche Dreiecksungleichung".



Beweis

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x$$

$$-\int_a^b |f(x)| \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b |f(x)|$$

Dreiecksungleichung $\quad \left|\sum x_i\right| \leq \sum |x_i|$

Kor 6.3.2. Seien $f, f_k \in C^0([a,b])$ mit $f_k \xrightarrow{\text{gleich.}} f$

Dann gilt

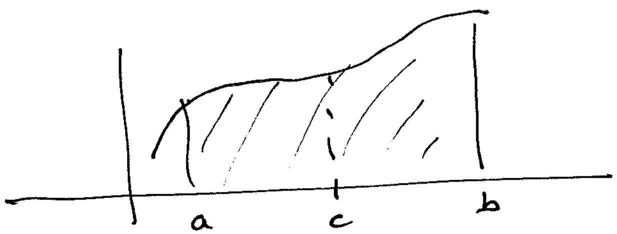
$$\left| \int_a^b f_k \, dx - \int_a^b f \, dx \right| \leq \int_a^b |f_k - f| \, dx$$

$$\leq |b-a| \sup_{x\in[a,b]} |f_k - f| \to 0$$

Kor 6.3.3. Potenzreihen dürfen im Innern ihres Konvergenzkreis gliedweise integriert werden.

Satz 6.3.3. (Gebietsadditivität) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ über $[a,b]$ integrierbar. Sei $c \in [a,b]$. Dann sind $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ integrierbar und gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



Konvention: ① Sei f integrierbar auf einem Intervall $[a, b]$

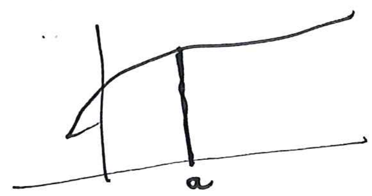
Für $c \leq d$ in $[a, b]$ definiert man

$$\int_d^c f\,dx := -\int_c^d f(x)\,dx .$$

Bem. Mit dieser Konvention gelten alle bisherigen Eigenschaften z.B. $\forall\, a, b, c$

① $$\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c dx .$$

② $$\int_a^a f(x)\,dx = 0 .$$



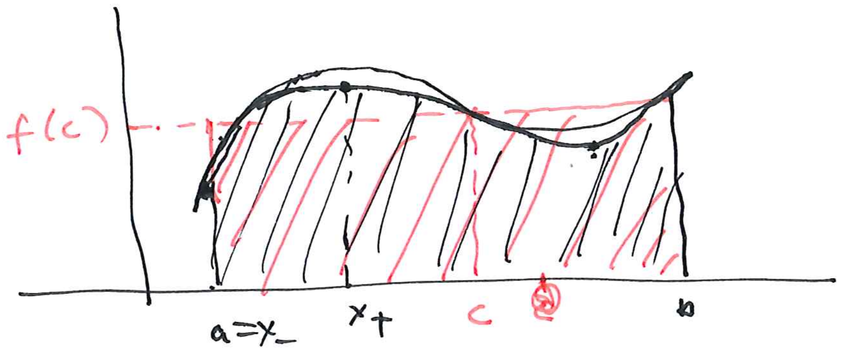
Ziel: Wir Studieren der Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration.

Satz (<u>Mittel wert Satz der Integralrechnung</u>).

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion

Dann existiert ein $c \in [a, b]$ mit

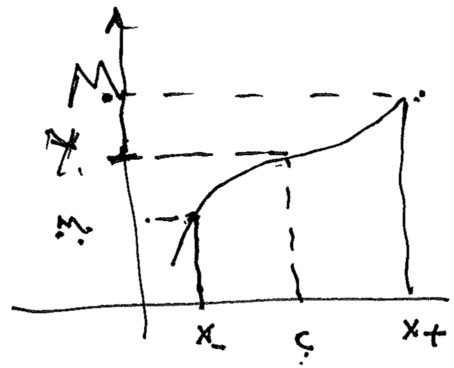
$$\int_a^b f(x)\,dx = \boxed{f(c)(b-a)}$$



Beweis Wir setzen

$$m := \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = f(x_-)$$

$$M := \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = f(x_+)$$



Wegen Standardabschätzungen.

$$f(x_-)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f(x_+)(b-a)$$

$$m = f(x_-) \leq \underbrace{\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Ein Zahl.}} \leq f(x_+) = M.$$

zws: f stetig, $f(x_-) = m$, $f(x_+) = M$ $m \leq M$.

sei $m < Y < M$. $\Longrightarrow \exists\, c \in [x_-, x_+]$ mit

$$m \leq \underset{\parallel}{Y}\!\!\!\!\!\! \quad f(c) \leq M.$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \quad \text{für ein } c$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a) \quad \text{für ein } c$$

$\boxtimes$

<u>Defn.</u> Sei $[a,b]$ ein geschlossene Interval in $\mathbb{R}$.
Sei f R-integrierbar über $[a,b]$.
Die Funktion

$$x \in [a,b] \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

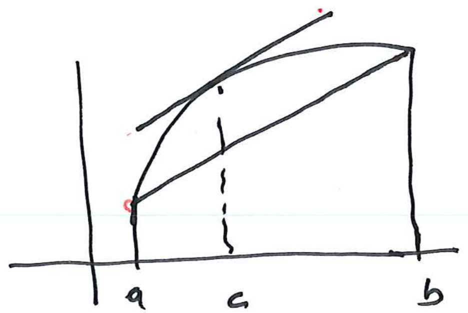
nennt sich das Integral mit veränderlichen oberen Grenze von f.

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

MWS der Diff.rechnung: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar.

Dann $\exists\, c \in [a,b]$ so dass

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



MWS der Integral.rechnung. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

$\exists\, c \in [a,b]$ so dass

$$\underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{} = \underbrace{f(c)}_{} .$$

(Sei F ein Stammfunkt zu f. Dann $F' = f$),

Dann $$\frac{1}{b-a}\big(F(b)-F(a)\big) = F'(c).$$

Satz 6.3.4 (HAUPTSATZ der Integral- Diff. Rechnung). (H.I.D.)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktion. Definiere für jeden $x \in [a,b]$ $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$

Dann ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar

und $F'(x) = f(x)$.

Kor 6.3.4 (Hauptsatz Version B). Sei f wie oben, F eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}.$$

__Beweis:__ Sei $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Zu zeigen ist $F'(x) = f(x)$

Betrachte die Defn der Ableitung.

$$F'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim \frac{1}{h} \Big[\int_a^{x+h} f(t)\,dt \underbrace{- \int_a^{x} f(t)\,dt}_{+ \int_x^a f(t)\,dt} \Big]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

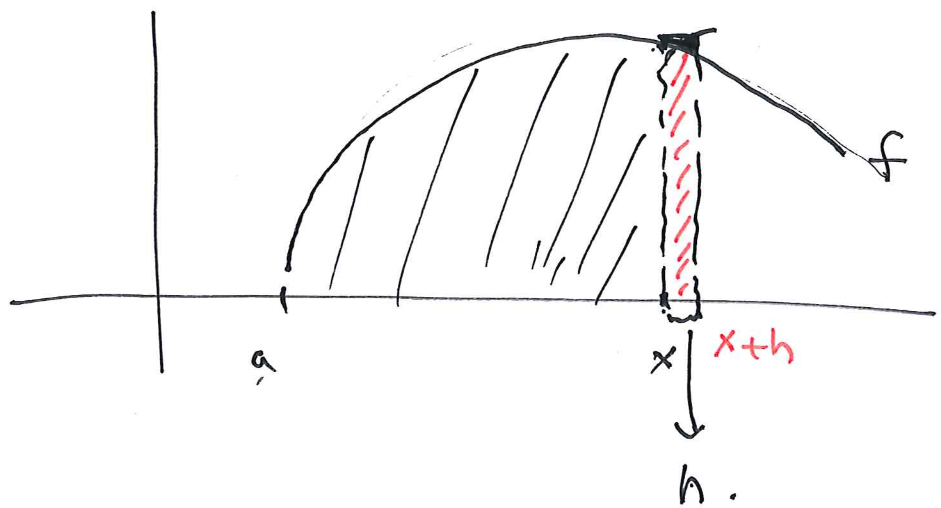
Nach dem MWS der Integralrechnung, existiert zu jedem solchen x, $h \neq 0$ ein Zwischenpunkt $\xi_h \in [x, x+h]$

mit $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi_h)(h)$

Nun ist $\xi_h \to x$ für $h \to 0$ da ξ_h zwischen $x, x+h$ liegt.

Somit
$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}\left(h\cdot f(\xi_h)\right).$$
$$= \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x).$$

$\Rightarrow \quad F'(x) = f(x).$



$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\underbrace{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}_{F(x+h) - F(x)} \approx h\,f(x)$$

Bmk ① Wegen HDD., hat jede stetige Funktion f mindestens eine Stammfunktion, nämlich

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

Wegen Satz 6.1.1, mit Ausnahme einer Additiven Konstante, die beim Differenzieren wegfällt, ist die Stammfunktion eindeutig bestimmt.

Defn. Ein Stammfunktion von f heisst auch unbestimmtes Integral von f (indefinite integral.) und wird mit $F(x) = \int f(x)\,dx$ bezeichnet.

② Mittels einer Stammfunktion, lässt sich das Integral einer gegebenen Funktion sehr leicht berechnen.

Dies ist der Inhalt des Hauptsatz Version B.

__Kor__ (Hauptsatz Version B). f stetig, F eine beliebige Stammfunktion zu f

Dann gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

__Beweis__. Für $x \in I = [a,b]$ definiere $F_0(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Dann ist $F_0(x)$ wegen HID eine Stammfunk von f

mit $F_0(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$, $F_0(b) = \int_a^b f(t)\,dt$

Somit $\int_a^b f(t)\,dt = F_0(b) - F_0(a)$.

Für beliebige Stammfunktion F gilt $F = F_0 + c$ für eine Konstante. Somit $F(b) - F(a) = (F_0(b) + c) - (F_0(a) + c)$
$= F_0(b) - F_0(a)$.

$\boxtimes$

Bsp. ① $\int e^x dx = e^x + c$.

② . $\int_0^1 x^2 - x \, dx$

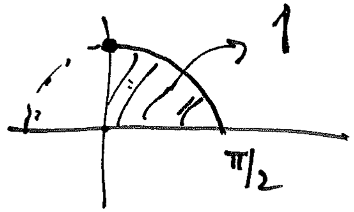
$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} = F(x)$ $\qquad$ $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$. ✓.

$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + \underline{\underline{c}}$.

$\int (x^2 - x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c$.

$\int_0^1 x^2 - x \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0) = -\frac{1}{6}$.

(3) $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$



$\int \cos x \, dx = \sin x$

$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

$F(x) = \int_a^{x} f(t)\, dt$

$F'(x) = f(x)$

(4) Sei $F(x) = \int_0^{x^2+5} \sin^2 t \, dt$, $F'(x) = ?$

$G(x) := \int_0^{x} \sin^2 t \, dt$, $G'(x) = \sin^2 x.$

$F(x) = G(x^2+5) \implies F'(x) \underset{\uparrow}{=} G'(x^2+5) \cdot (x^2+5)'$

Kettenregel. $= (\sin^2(x^2+5)) \cdot (2x)$

Bsp. von Stammfunktionen

Defn Bereich	Funktion f	Stammfunktion F
$(0,\infty)$.	x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$
$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\mathbb{R}$	x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\mathbb{R}$	e^x	$e^x + C$.
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + C$
	$\sin x$	$-\cos x + C$.

$$F(x) = \ln\lvert x\rvert = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 . \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 1/x, & x > 0. \\ \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + c$
$(-1,1)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x + C$

$$F(x) = -\ln\lvert\cos x\rvert \Rightarrow F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

$(-1,1)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\arccos x + C.$
$\mathbb{R}$	$1/1+x^2$	$\arctan x + C.$

<u>Bsp.</u> Mittel Kor 6.3.3. können wir die Taylorreihe für $\ln(1+x)$ berechnen (entw. punkt $x_0 = 0$).

Für $0 \leq b < 1$

$$\int_1^{1+b} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{1+b} = \ln(1+b) - \underbrace{\ln(1)}_{0} = \ln(1+b)$$

$$\ln(1+b) = \int_1^{1+b} \frac{dx}{x} = \int_1^{1+b} \frac{dx}{1-(1-x)}$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} r^k}_{= \frac{1}{1-r}}, \quad |r|<1 \qquad \underline{\frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k} \quad |1-x|<1.$$

$$\ln(1+b) = \int_1^{1+b} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\int_1^{1+b} (1-x)^k \, dx}$$

$$\int (1-x)^k = -\frac{(1-x)^{k+1}}{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{(1-x)^{k+1}}{k+1} \Bigg|_1^{1+b} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{(-b)^{k+1}}{k+1} - 0 \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}\, b^{k+1}}{k+1}$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\, b^{k}}{k} = \ln(1+b) \quad |b|<1}$$