Integrationsregeln.

- **Monotonie**: Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ R-integrable, beschränkt mit $f \leq g$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

- **Linearität**: Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ R-integrable, und sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Dann ist $\alpha f + \beta g$ über $[a, b]$ R-integrierbar

und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$$

- **Standardabschätzungen** Sei $f \in C^0([a, b])$. Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f|\,dx \leq (\sup |f|)(b-a)$$

- <u>Gebietsadditivität:</u> Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und sei $c \in [a,b]$. Dann sind die Funktionen $f|_{[a,c]}$ bzw $f|_{[c,b]}$ integrable und es gilt

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^a f\,dx .$$

<u>Konvention:</u> $$\int_a^b f\,dx = - \int_b^a f\,dx$$

- $$\int_a^a f\,dx = 0 .$$

- Seien $f, f_k \in C^0([a,b])$ mit $f_k \xrightarrow{glm} f$. Dann gilt

$$\left| \int_a^b f_k \, dx - \int_a^b f \, dx \right| \leq \int_a^b |f_k - f| \, dx \leq (b-a) \sup |f_k - f| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

- Potenzreihen dürfen im Innern ihres Konvergenzkreises gliedweise integriert werden

d.h. $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad , \quad |x| < \rho$

$$\Rightarrow \int_a^b p(x) \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_a^b \quad , \quad \text{falls } [a,b] \subset (-\rho, \rho)$$

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung (Version A)

Sei $f \in C^0([a,b])$. Setze $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$

Dann gilt $F \in C^1((a,b))$ mit $F'(x) = f(x)$.

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung (Version B)

Sei $f \in C^0([a,b])$, F ein Stammfunktion zu f.

Dann gilt
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Notation: $\int f(x)\,dx$ (ohne Grenzen)

Das unbestimmte Integral ist eine Notation für die Stammfunktion von f.

Integrationsmethoden.

Ziel: Gegeben f, Suchen wir ein Stammfunktion

$$\int f(x)\,dx$$

Bmk: Da das Integration die Umkehrung von differenzieren ist, liefert jede Ableitungsregeln, eine für das Integration.

Produkt regel für Diff. $\Longrightarrow$ Partielleintegration

Kettenregel für Diff. $\Longrightarrow$ Methode der Substitution.

(F) Partielle integration :

Die Produktregeln für Ableitung

$$(uv)' = u'v + uv'$$ für zwei differenzierbare funktionen $u(x)$, $v(x)$

Diese führt zu Integrationsregel, Partielle integration.

$$uv = \int (uv)'\,dx = \int (u'v + uv')\,dx + C$$
$$= \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$$

Satz 6.1-2. (P.I). Sei $u, v \in C^1[a,b]$. Dann gilt

$$\boxed{\int (uv')\,dx = uv - \int u'v\,dx + C}$$

Partielle Integration.

$$v' = \frac{dv}{dx} \qquad u' = \frac{du}{dx}.$$

Wir schreiben oft die Partielleintegration auch als

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v \underbrace{du}_{u'dx} + C}.$$

Bsp. 1

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\underbrace{e^x}_{v'} dx}_{dv} \qquad u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1. \quad v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$$

$$= xe^x - \int e^x 1\,dx + C.$$

$$= xe^x - e^x + C.$$

Bmk.: Der wichtigste Punkt bei der PI ist, die Funktionen, die die Rollen von u und v übernehmen, geeignet zu wählen.

(1') $\int x e^x \, dx$ $\qquad x = v'(x) \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$.

$\qquad\qquad\qquad\qquad e^x = u(x) \Rightarrow u'(x) = e^x$

$= e^x \frac{x^2}{2} - \int e^x \frac{x^2}{2} \, dx$ nicht einfacher als $\int x e^x \, dx$

(2) $\int \underbrace{x^n}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} \, dx = uv - \int u'v \, dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x \, dx$

Induktion.

$u = x^n \rightarrow u'(x) = n x^{n-1}$

$v' = e^x \rightarrow v(x) = e^x$

$= (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k e^x}{k!} + C,$

3 P.I eignet sich gut dazu, Logarithmusterme zu eliminieren.

Manchmal muss man dazu das Integrand erst 'künstlich" als Produkt schreiben.

$$\int (\log x)\,dx = \int \underbrace{(\log x)}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'}\,dx \qquad u = \log x \quad v' = 1 \qquad u' = \frac{1}{x} \quad v = x$$

$$= uv - \int u'v\,dx = x\log x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx = x\log x - x + C.$$

(3) Manchmal führt wiederholte P.I auf den ursprünglichen Ausdruck zurück. Mit Glück kann man dann nach diesem auflösen.

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \underbrace{(\sin x)}_{u}\underbrace{(\sin x)}_{v'}\,dx \qquad u = \sin x \quad v' = \sin x$$
$$u' = \cos x \quad v = -\cos x.$$

$$= uv - \int u'v\,dx = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx + C.$$
$$= -\sin x\cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx + C$$
$$= -\sin x\cos x + \int 1\,dx - \int \sin^2 x\,dx + C,$$
$$= -\sin x\cos x + x - \int \sin^2 x\,dx + C.$$

$$\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + x \boxed{- \int \sin^2 x\,dx} + C$$

$$2\int \sin^2 x\,dx = \frac{-\sin x\cos x}{2} + \frac{x}{2} + C$$

2. Lösung: Dieser Integral können wir auch ohne P-I berechnen mittels

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}.$$

$$\int \sin^2 x = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \underbrace{\int \cos 2x \, dx}_{\frac{\sin 2x}{2}} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}(2\sin x \cos x),$$

Bsp. 6.1.3. $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1}\, dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin x)^k}_{u} \underbrace{(\sin x)}_{v'}\, dx$$

$u(x) = (\sin x)^k \qquad v'(x) = \sin x$

$u'(x) = k(\sin x)^{k-1} \cdot \cos x \qquad v = -\cos x$

$$= uv - \int v u'\, dx = -(\cos x)\sin^k x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} k(\sin x)^{k-1} \cos^2 x\, dx$$

P.I. mit definite Integral

$$\boxed{\int_a^b u v'\, dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u' v\, dx}$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1}\,dx = \left[-\cos x (\sin x)^k \right]\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left[-\cos x (\sin x)^k \right](0) \Big]$$

$$+ k \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \, dx$$

$$= k \left[\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} \right] - \underbrace{k \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1} \, dx}.$$

$$(k+1) \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1}\,dx = k \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1}\,dx.$$

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1}\,dx = \frac{k}{k+1} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1}\,dx}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1}\,dx = \frac{k}{k+1}\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1}\,dx.}$$

Falls $(k+1) = 2n$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n}\,dx = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n-2}\,dx = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)\underbrace{\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2(n-1)}\,dx}.$$

$$= \left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2(n-2)}\,dx$$

$$\vdots$$

$$= \left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)\cdots\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\pi/2} 1\,dx}_{\pi/2.}$$

$$= \left(\frac{2n}{2n}\right)\frac{(2n-1)}{(2n)}\left(\frac{2n-2}{2n-2}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

$$= \frac{(2n)!}{\left[(2n)(2n-2)\cdots 2\right]^2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

$$= \frac{(2n)!}{\left[2(n)\,2(n-1)\cdot 2(n-2)\cdots 2\right]^2} \cdot \frac{\pi}{2}\,.$$

$$= \boxed{\frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n}\, dx}$$

Analog:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1}\, dx = \frac{(2^n\, n!)^2}{(2n+1)!}}\,.$$

<u>Beachte</u>. Der π-term kommt in zweiten Fall $(k+1 = 2n+1)$ nicht vor!

Dies benützen wir wie folgt um ein "Formel für π" aufzustellen.

For $0 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq \sin x \leq 1$

$$(\sin x)^k - (\sin x)^{k+1} = \underbrace{(\sin x)^k}_{\geq 0}\,(\underbrace{1 - \sin x}_{\geq 0}) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (\sin x)^k > (\sin x)^{k+1} \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$$

Also $$\underbrace{\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1}\,dx}_{} \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n}\,dx \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n-1}\,dx.$$

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \leq \frac{(2n)!\,\frac{\pi}{2}}{(2^n n!)^2} \leq \underbrace{\frac{(2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2n-1)!}}$$

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n)(2n)!} = \frac{(2 . 2^{n-1}\, n\, (n-1)!)^2}{2^2 n^2\, (2n-1)!}$$

$$\frac{(2^n n!)^2 (2^n n!)^2 \cdot 2}{(2n+1)!\,(2n)!} \leq \pi \leq \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \cdot 2 \cdot \frac{(2^n n!)^2}{2n\,(2n)!}$$

$$\frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2}\,\frac{2}{2n+1} \leq \pi \leq \frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2} \cdot \frac{2}{2n}.$$

$$\Longrightarrow \boxed{\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^4}{(2n)!^2} \cdot \frac{1}{n}}.$$

Wallisches Formel.

$$\begin{array}{l} n=1 \\ n=10 \\ n=50 \\ n=100 \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 3.221 \\ 3.157 \\ 3.149 \end{array} \right.$$

Bsp. 6.1.4 (Stirlingsche Formel).

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}$$

Das asymptotische Verhalten von $n!$

Beweis: Siehe Stowe.

Für Anwendungen in Informatik.

Wikipedia: Comparison-sort

Binäre Exponentiation - insbesondere "Laufzeitsanalyse".

Bmk. Die Taylor Entwicklung einer Funktion $f \in C^{n+1}$ um x_0 erhält man durch n-fache Partielle Integration.

Übung:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dx \quad \text{HID}.$$

$$\left[F(x) - F(x_0) = \int f(t)\, dx \quad \text{HID} \right].$$

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} \underbrace{(t-x)^0}_{v'} \underbrace{f'(t)}_{u}\, dt = (t-x) f'(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\, dt$$

$$= (x - x_0) f'(x_0) + \underbrace{\int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\, dt}_{PI}$$

Partielle Integration funktioniert falls

$$f = \begin{cases} (\text{poly})\, e^x \\ (\text{poly})\, (\sin x) \\ (e^x)\, (\text{trig. func.}). \\ \log x \\ \vdots \end{cases}$$

II Methode der Substitution.

Diese Methode ist eine Umkehrung der Kettenregel.

Satz 6.1.5. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, sowie $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ der Klasse C^1, so wie $t_0 \leq t_1$ in $[\alpha, \beta]$ so dass $g([t_0, t_1]) \subset [a, b]$. Dann gilt

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)\,dx}$$

Beweis. Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion für f.

$F' = f$

Dann gilt nach HID (Version B):

$$\int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)\,dx = F(g(t_1)) - F(g(t_0)).$$

Nach der Kettenregel, haben wir $\big((F \circ g)(t)\big)'$

$$= F'(g(t)) \cdot g'(t)$$
$$= f(g(t)) \cdot g'(t).$$

d.h. $(F \circ g)(t)$ ist eine Stammfunkt. für $f(g(t)) \cdot g'(t)$.

Woraus mit dem HID folgt

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))\,g'(t)\,dt = (F \circ g)(t_1) - (F \circ g)(t_0) = F(g(t_1)) - F(g(t_0))$$
$$= \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)\,dx.$$

Kor Für die unbestimmtes Integral gilt

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt + C.$$

Bmk. Die Linke Seite als Funktion von x ist gleich der Rechtenseite als Funktion von t vermöge der Relation $x = g(t)$.

$dx = g'(t)\,dt$.

$$x(t) = g(t)$$
$$\frac{dx}{dt} = g'(t)$$
$$dx = g'(t)\,dt$$

Bmk: Für die Subs. regeln

$$\boxed{\left[\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)\,dx\right]}$$

gibt es im Prinzip zwei Lesarten.

Man kann sie entweder von links nach rechts oder von rechts " links anwenden.

A (links $\longrightarrow$ rechts).

Liegt ein Integral explizit in der Form

$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))\, g'(t)\, dt$ vor, so können wir die S.R. von links nach rechts anwenden.

Bsp. (1) $\int_0^1 \underbrace{(1+t^2)^{114}}\, \underbrace{(2t)\, dt}$. Setzt man

$g(t) = 1+t^2 = x$
$g'(t) = 2t$
$dx = g'(t)\, dt$
$= (2t)\, dt.$

$$= \int_1^2 x^{114}\, dx = \left.\frac{x^{115}}{115}\right|_1^2$$

$$= \frac{2^{115}}{115} - \frac{1}{115} = \frac{2^{115}-1}{115}.$$

② $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin^3 t)(\cos t)\,dt$ $\qquad x = \sin t$, $dx = \cos t\, dt$

$$= \int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + \Big|_0^1 = \frac{\sin^4 t}{4} + C \,\Big|_{0=t}^{t=\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

!! $\boxed{\neq \int_0^{\pi/2} x^3\,dx}$ Vorsichtig!

③ $\displaystyle\int \tan t\,dt = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt$ $\qquad x = \cos t$, $dx = -\sin t\,dt$.

$$= \int \frac{1}{x}(-dx) = -\int \frac{dx}{x} = -\log|x| + C$$

$$= -\log|\cos t| + C.$$

$$\boxed{\int \tan t\,dt = -\log|\cos t| + C}$$