

Hauptsatz (Version A) Für jede stetige Funktion f auf $[a, b]$ ist die Funktion F auf $[a, b]$ $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ eine Stammfunktion von f

Hauptsatz (Version B) Für jede stetige Funktion f auf $[a, b]$ und jede Stammfunktion F von f gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Integrationsmethoden

1) Partielle Integration - Umkehrung der Produktregel.

Satz: Sei $u, v \in C^1(a, b)$. Dann gilt:

$$\int u v' dx = u v - \int u' v dx + C$$

$$\int_a^b u v' dx = u(x) v(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

Bmk: Als Erinnerungstütze deutet man manchmal durch einen Pfeil nach oben an, welchen Faktor man integriert und durch eine Pfeil nach unten, welchen Faktor man differenziert

z.B.

$$\int \underbrace{x}_{\downarrow} \underbrace{e^x}_{\uparrow} dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Bmk ① Was wichtig ist (bei der P.I.) die Funktionen
geeignet zu wählen, die die Rollen von u und v übernehmen.

② P.I. eignet sich gut für Integranden mit gestallt
(poly)(exponential), (poly)(log. Funktionen), (poly)(log).

Anwendung der P.I.: ① Wallisches Produkt $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2^n n!}{(2n)!}\right)^4}{\frac{1}{n}}$

② Stirlingsche Formel: $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.

③ Taylor Formel

II Methode der Substitution

Satz

Sei

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig

$$g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$$

der Klasse C^1 , so wie

$t_0 \leq t_1$ in $[\alpha, \beta]$ so dass $g([t_0, t_1]) \subset [a, b]$. Dann gilt:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t)) g'(t) dt = \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x) dx$$

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt + C$$

Die linke Seite als Funk von x ist gleich
 der rechten Seite als Funktion von t vermöge
 der Relation $x = g(t)$, $dx = g'(t) dt$

$$\int f(x) dx \Big|_{x=g(t)} = \int f(g(t)) g'(t) dt + C.$$

Ⓐ liegt ein Integral explizit in der Form

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$
 vor, so können wir die
 Subs. Regel von links nach rechts anwenden.

Bsp:

$$\int_0^1 \underbrace{(1+t^2)^4}_{x=1+t^2} \underbrace{(2t) dt}_{dx=2t dt}$$

$$= \int_{x=1}^{x=2} x^4 dx = \left. \frac{x^5}{5} \right|_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5}$$

Die Integrationsgrenzen bei Substitution:

Wenn man bestimmte Integrale berechnet, gibt es zwei Methoden mit den Integrationsgrenzen umzugehen.

A) Man substituiert $x=g(t)$, berechnet eine Stammfunktion in x , und ersetzt danach die neue Variable (x) mit der alten Variable (t) und benutzt die Grenzen für t .

B) Man ändert die Integrationsgrenzen während der Integration:

BSP: (B) $\int_{t=0}^{t=1} \frac{e^t}{1+e^t} dt$

~~if~~ $e^t = x$
 $e^t dt = dx$

$$\begin{aligned} x=e^1=e & \int_{x=e^0=1} \frac{dx}{1+x} = \int_1^e \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| \Big|_{x=1}^{x=e} = \ln|1+e| - \ln|2| \\ & = \ln\left|\frac{1+e}{2}\right| \end{aligned}$$

(A) $\int \frac{e^t dt}{1+e^t} = \int \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| = \ln|1+e^t| \Big|_{t=0}^{t=1} = \ln|1+e| - \ln|1+1|$

Falls ein Integral der Gestalt $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

mit gewissen Grenzen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vorliegt, das schwer zu berechnen scheint, versucht man mittels geeigneter Substitution $x = g(t)$ dieses Integral umzuformulieren, so dass die Sub. regel anwendbar ist, wobei $g(t_0) = \alpha$, $g(t_1) = \beta$ gelten muss

Bsp.

$$\textcircled{1} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Mit der Substitution $x = \sin t = g(t)$

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \end{aligned}$$

$$dx = \cos t dt$$

$$\int_{t=0}^{t=\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{t}{2} + \cos \frac{2t}{2} \right) dt = \frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{2} \Big|_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Bsp.

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx.$$

$$u = 2x-3 \Rightarrow \frac{u+3}{2} = x$$

$$du = 2 dx$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{x^2 + 5x + 7}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x^2 + 5x + 7}{x^{1/2}} dx = \int \left(x^{3/2} + 5x^{1/2} + 7x^{-1/2} \right) dx \\ &= \int x^{3/2} dx + 5 \int x^{1/2} dx + 7 \int x^{-1/2} dx \\ &= \frac{x^{3/2+1}}{5/2} + 5 \frac{x^{3/2}}{3/2} + 7 \frac{x^{1/2}}{1/2} + C. \end{aligned} \right.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{\frac{u+3}{2} \frac{du}{2}}{u^{1/2}}.$$

$$= \frac{1}{4} \int (u^{1/2} + 3u^{-1/2}) du.$$

$$= \frac{1}{4} \frac{u^{3/2}}{3/2} + \frac{3}{4} \frac{u^{1/2}}{1/2}.$$

$$= \frac{1}{6} u^{3/2} + \frac{3}{2} u^{1/2} + C.$$

$$= \frac{1}{6} (2x-3)^{3/2} + \frac{3}{2} (2x-3)^{1/2} + C.$$

Bsp. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

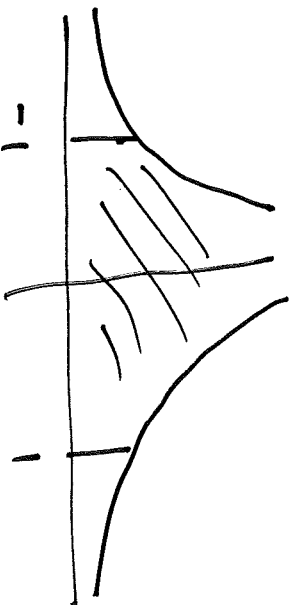
$$u = \sin x = u(x)$$

$$du = \cos x dx$$

$$u(-\pi/2) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$$

$$u(\pi/2) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\int_{-1}^1 \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} \Big|_{-1}^1 = -1 - (-1) = -2.$$



Die Rechnung muss falsch sein
weil links ein Integral steht
mit einem positiven Integrand
Das Integral war also positiv sein
Aber der rechte Teil steht (-2) !

Der Fehler bei der Rechnung ist, dass die Substitution
 $f(u) = \frac{1}{u^2}$ ist nicht im ganzen Intervall $[-1, 1]$ definiert
Bei $u=0$ ist nicht stetig!

Bsp. $\int_0^{2\pi} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2$

ist eine einfache Integral

falls wir diese mit einer Substitution berechnen
wählen z.B. $t = \sin x$ oder $x = \arcsin t$.

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$\int_0^0 \left(\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt = 0$$

klar ist das falsch!

Der Fehler nochmals ist bei der Substitution $t = \sin x$
oder $x = \arcsin t$. Die Integration ist über den Intervall
 $[0, 2\pi]$ aber die Funktion $\arcsin t$ ist definiert im Intervall
 $[-\pi/2, \pi/2]$

Bmk : Vorsicht! Fehler können leicht
einschleichen wenn man die Definitionsintervalle
der Stetigkeitsfunktion und ihrer Inversen nicht genau
kontrolliert!
..
Wenn man die Subs. regel anwenden möchte,
muss die äussere Funktion f stetig sein und
die innere Funktion g stetig differenzierbar!
o.

Bsp.

$$\int_{-1}^1 x^4 dx = \left. \frac{x^5}{5} \right|_{-1}^1 = \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

Aber mit der Substitution $u = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{u}$
 $du = 2x dx$

$$\int_{-1}^1 \underbrace{x^3}_{\underbrace{x}_{u^{3/2}}} \underbrace{dx}_{\frac{du}{2}} = \int_{-1}^1 u^{3/2} \frac{du}{2} = 0 \quad \int \int \int$$

Der Fehler ist dass, die Substitution $x = \sqrt{u}$ gilt nur für $x \in [0, 1]$.

Für $x \in [-1, 0]$, wir müssen $x = -\sqrt{u}$
 $dx = -\frac{1}{2} u^{-1/2} du$

$$\int_{-1}^1 x^4 dx = \underbrace{\int_{-1}^0 x^4 dx}_{\int_{-1}^0} + \underbrace{\int_0^1 x^4 dx}_{\int_0^1}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_0^1 (-\sqrt{u})^4 u^{-1/2} du = -\frac{1}{2} \int_0^1 u^{3/2} du = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{3/2} du = \frac{1}{2} \frac{u^{5/2}}{5/2} \Big|_0^1 \\
 & = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \\
 & \int_0^1 x^u dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^u dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \\
 & \int_0^1 x^u dx = \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

III

Partialbruchzerlegung:

Integration Rationaler Funktionen:

Seien $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten und $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale

Funktion.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = ?$$

7

Partialbruchzerlegung ist eine Darstellung von $R(x)$ als eine Summe von "elementaren" rationalen Funktionen.

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C.$$

Satz 6.1.6. (Partialbruchzerlegung). Sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

und $Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$

$$= \prod_{i=1}^n (x - x_i^-)^{n_i^-} \prod_{j=1}^m (x - (\alpha_j + i\beta_j^-))^{m_j^-} (x - (\alpha_j - i\beta_j^-))^{m_j^-}$$

$$= \prod_{i=1}^n (x - x_i^-)^{n_i^-} \prod_{j=1}^m ((x - \tilde{\alpha}_j^-)^2 + \tilde{\beta}_j^{-2})^{m_j^-}$$

dh $Q(x)$ besitzt die reellen Nullstellen x_i^- mit Vielfachheit n_i^- und komplexen Nullstellen $z_j^- = \alpha_j^- \pm \beta_j^- i$ mit " m_j^-

Dann gilt
$$\overline{Q}(x) = \overline{P}_1(x) + \sum_{i=1}^n \overline{Q}_i^-(x) + \sum_{j=1}^m \overline{S}_j^-(x)$$

wobei $P_1(x) = \text{Polynom}$

$$R_i^-(x) = \frac{a_{i1}}{(x-x_i^-)} + \frac{a_{i2}}{(x-x_i^-)^2} + \dots + \frac{a_{in_i}}{(x-x_i^-)^{n_i}}$$

$$S_j^-(x) = \frac{b_{jm_j^-} x + d_{jm_j^-}}{((x-\alpha_j^-)^2 + (\beta_j^-)^2)^{m_j^-}} + \dots + \frac{b_{jn_j^-} x + d_{jn_j^-}}{((x-\alpha_j^-)^2 + (\beta_j^-)^2)^{m_j^-}}$$

Bmk. ① Das Polynom $P_i(x)$ tritt nur auf

falls $\deg P \geq \deg Q$. In diesem Fall berechnet man $P_i(x)$ mit Polynom division.

② Unbekannte Parameter, die bestimmt werden müssen sind $a_{ik} \quad k=1, \dots, n_i \quad i=1, \dots, N$.
 $b_{je}, d_{je} \quad j=1, \dots, m_j \quad j=1, \dots, N$.

③ Diese Parameter werden durch Koeffizientenvergleich berechnet.

$$\textcircled{1} \quad R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} \quad Q(x) = x^2(x^2+1)$$

$x=0$ ist eine Nullstelle mit Vielfachheit 2.
 $x=\pm i$ sind komplexe Nullstellen Vielfachheit 1.

$$\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{b_1x+d_1}{x^2+1} = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

$$\frac{[a_1(x)(x^2+1) + a_2(x^2+1) + (b_1x+d_1)x^2]}{x^2(x^2+1)} = \frac{[1-x]}{x^2(x^2+1)}$$

$$a_1x^3 + b_1x^3 + (a_2+d_1)x^2 + a_1x + \textcircled{0} + a_2 = 1-x$$

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= 0. & a_1 &= -1 & \Rightarrow & b_1 &= 1 \\ a_2 + d_1 &= 0 & a_2 &= 1. & & d_1 &= -1 \end{aligned}$$

$$\int \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= -\ln|x| + \int x^{-2} dx + \int \frac{x-1}{x^2+1} dx$$

$$= -\ln|x| + \underbrace{\int \frac{x}{x^2+1} dx}_{\ln|x^2+1|} - \underbrace{\int \frac{1}{x^2+1} dx}_{\arctan x}$$

$$\frac{\ln|x^2+1|}{2} - \arctan x$$

Bsp

$$\int \frac{4x^3 - 3x + 5}{x^2 - 2x} dx = ?$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 3x + 5 \quad | \quad x^2 - 2x \\ \underline{4x^3 - 8x^2} \\ 8x^2 - 3x + 5 \\ \underline{8x^2 - 16x} \\ 13x + 5 \end{array}$$

$$\frac{4x^3 - 3x + 5}{x^2 - 2x} = 4x + 8 +$$

$$\frac{13x + 5}{x^2 - 2x}$$

$$= 4x + 8 + \frac{13x + 5}{x(x-2)}$$

$$= 4x + 8 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{13x+5}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$$

$$\Rightarrow 13x+5 = A(x-2) + B(x)$$

$$x=2 \Rightarrow 31 = 2B \Rightarrow B = 31/2$$

$$x=0 \Rightarrow 5 = -2A \Rightarrow A = -5/2$$

$$\int \frac{4x^3 - 3x + 5}{x^2 - 2x} dx = \int \left(4x + 8 + \left(-\frac{5}{2}\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{31}{5} \right) \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$= 2x^2 + 8x - \frac{5}{2} \ln|x| + \frac{31}{5} \ln|x-2| + C.$$

Bsp. $R(x) = \frac{9}{x^3 - 3x - 2} = \frac{9}{(x-2)(x+1)^2}$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$9 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x-2)$$

Setze $x=2 \Rightarrow 9 = A \cdot 9 \Rightarrow \underline{A=1}$

Setze $x=-1 \Rightarrow 9 = C(-3) \Rightarrow \underline{C=-3}$

Setze $x=0 \Rightarrow 9 = A + B(1)(-2) + C(-2) \Rightarrow B = -1$

$$\int R(x) = \int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} + \frac{-3}{(x+1)^2} dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C.$$

Wir wollen die Stammfunktionen von
"elementare rationale Funktionen" bestimmen

$$R(x) = \frac{1}{(x-a)^n} \quad \text{oder} \quad \frac{bx+d}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^m}.$$

Grundtypen der Integrale rat. Funktionen

(I) $P(x) = \sum_{n=0}^L a_n x^n \rightsquigarrow \int P(x) \text{ ist einfach} \dots$

II Inverse Potenzen.

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \log|x-a| + C & n=1 \\ \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} & n>1 \end{cases}$$

III

$$\int \frac{bx+d}{(x-a)^2 + \beta^2}^n dx$$

Substitution $x-a = \beta t$
 $dx = \beta dt$
Isiert

$$= \int \frac{\dot{b}(\beta t + a) + d}{\beta^{2n}(t^2 + 1)^n} dt$$

Dies hat die allgemeine Form

$$\int \frac{Ct + D}{(t^2 + 1)^m} dt = C \int \underbrace{\frac{t}{(t^2 + 1)^m}}_{\text{mit Subst. } t^2 + 1 = u} dt + D \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^m}$$

$$\int \frac{t}{(t^2 + 1)^m} dt \quad \text{mit Subst. } t^2 + 1 = u \quad 2t dt = du$$

$$\stackrel{11}{=} \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^m} = \begin{cases} \frac{u^{-m+1}}{2(1-m)} & m \geq 2 \\ \frac{1}{2} \ln|u| & m = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-m)} \frac{1}{(t^2 + 1)^{m-1}} & m \geq 2 \\ \frac{1}{2} \ln|1+t^2| & m = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) + C$$