

Partielle Integration

Seien $u, v \in C^1([a, b])$.

Dann gilt

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v dx$$

Substitutionsregel

Seien $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
stetig

$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
streng monoton

Sei $g([a, b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t)) g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx$$

Partialbruchzerlegung. Seien P, q Polynome in $\mathbb{R}$

und
$$P(x) = \prod_{i=1}^N (x - x_i)^{n_i} \prod_{j=1}^M ((x - d_j)^2 + \beta_j^2)^{m_j}$$

Dann gibt es genau eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{P(x)}{q(x)} = P_1(x) + \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^{n_i} \frac{a_{ik}}{(x - x_i)^k} \right) + \sum_{j=1}^M \left(\sum_{l=1}^{m_j} \frac{b_{jl}x + d_{jl}}{((x - d_j)^2 + \beta_j^2)^l} \right)$$

Grundtypen der Integralen rationaler Funktionen

I Polynom

$$P(x) = \sum_{n=0}^k a_n x^n$$

$$\int P(x) dx = \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

II

Inverse Potenzen.

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^r} = \begin{cases} \log|x-x_0| + C, & r=1 \\ -\frac{1}{1-r} \frac{1}{(x-x_0)^{r-1}} + C, & r \geq 2. \end{cases}$$

3

III

$$\int \frac{bx+d}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^m} dx$$

~~*~~

Substitution

$$x - \alpha = \beta t$$

Legend

$$dx = \beta dt$$

$$\int \frac{Ct + D}{(t^2 + 1)^m} dt \quad \text{for } C, D$$

$$= C \int \frac{t}{(t^2 + 1)^m} dt + D \int \frac{1}{(t^2 + 1)^m} dt$$

$$\text{III}_a \quad \int \frac{t}{(t^2 + 1)^m} dt \quad \begin{array}{l} t^2 + 1 = u \\ 2t dt = du \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u^m} = \begin{cases} \frac{1}{2} \log|u| & m=1 \\ \frac{1}{2} \frac{u^{1-m}}{1-m} & m \geq 2 \end{cases}$$

4

$$\text{III b} \quad \int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt$$

$$m=1 \quad \int \frac{1}{t^2+1} dt = \arctan t + C.$$

$$\text{Für } m > 1, \text{ Setze } I_m := \int \frac{dt}{(t^2+1)^m}$$

Parallele Integration:

$$\begin{aligned} u' &= 1 & v &= (t^2+1)^{-m} \\ u &= t & v' &= -m(t^2+1)^{-m-1} \cdot 2t \end{aligned} \quad I_m = \int \underbrace{\frac{1}{u'}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(t^2+1)^m}}_v dt = \frac{t}{(t^2+1)^m} + \int \frac{m \cdot 2t^2}{(t^2+1)^{m+1}} dt$$

$$I_m = \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{m+1}} dt = \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m \left[\int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{m+1}} dt \right]$$

$$\begin{aligned}
 I_m &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2m \left[\underbrace{\int \frac{\frac{t^2+1}{(t^2+1)^{m+1}} dt}_{I_m} - \underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+1)^{m+1}}}_{I_{m+1}} \right] \\
 &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2m [I_m - I_{m+1}].
 \end{aligned}$$

Woraus folgt $2m I_{m+1} = (2m-1) I_m + \frac{t}{(t^2+1)^n}.$

$$I_{m+1} = \frac{1}{2m} \left[\frac{t}{(t^2+1)^n} + (2m-1) I_m \right].$$

Resurive $I_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{t}{t^2+1} + I_1 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{t}{t^2+1} + \arctan t \right] + C.$

$$I_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{t}{(t^2+1)^2} + 3 I_2 \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{t}{(t^2+1)^2} + 3 \left[\frac{1}{2} \frac{t}{t^2+1} + \arctan t \right] \right) + C.$$

§64. Uneigentliches R. Integral.

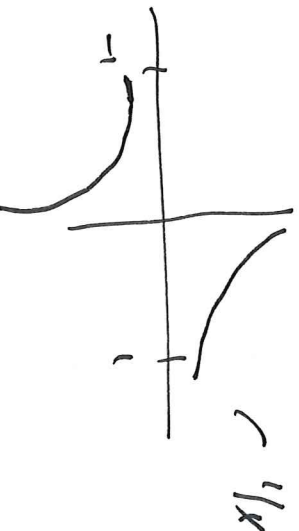
Der Begriff "uneigentliches Integral" ermöglicht Funktionen auf unbeschränkte

Intervallen z.B. (a, ∞)
 $(-\infty, b)$
 $(-\infty, \infty)$

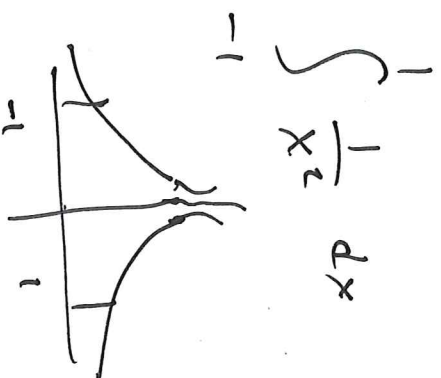
oder unbeschränkte Funktionen zu integrieren.

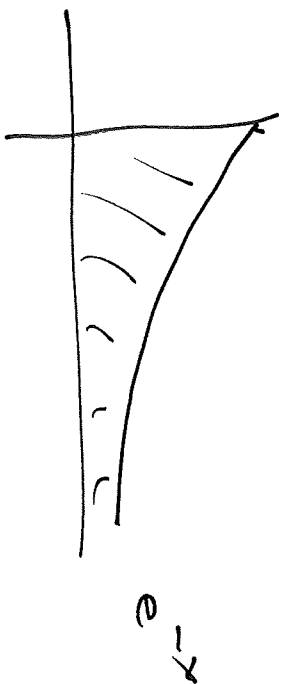
z.B.

$$\textcircled{1} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$



$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$



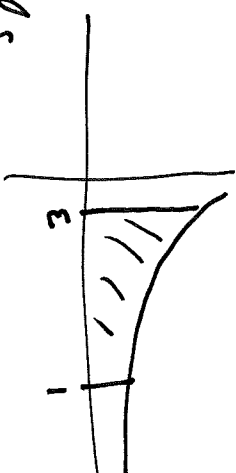


$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx \quad ?$$

z.B. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ hat "keinen Sinn" da $\frac{1}{\sqrt{x}}$ unbeschränkt ist in $x=0$.

Aber $\forall \varepsilon > 0$ ist $\frac{1}{\sqrt{x}}$ über $[\varepsilon, 1]$ integrierbar. Der Wert des Integrals

$$\int_{\varepsilon}^1 x^{-1/2} dx = 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$



Also $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$

Defn. 6.4-1

Sei f eine Funktion auf einem offenen Intervall (a, b) , deren Einschränkung auf jedes kompakte Teilintervall $[a', b']$ integrierbar ist.

Dann ist das uneigentliche Integral von f von a bis b definiert

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{a' \rightarrow a} \lim_{b' \rightarrow b} \int_{a'}^{b'} f(x) dx.$$

Falls diese Grenzwert existieren, heißt f über (a, b) uneigentlich R-integrierbar.

Bemk: a, b können $\pm \infty$ sein).

(I.)

Unendliches Integrationsintervall.

(i)

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x) dx$$

mit folgenden Voraussetzungen

• die Integrale

$$\int_a^B f(x) dx \quad \text{existieren,}$$

ist eine Funktion der oberen Grenze B .

- Ihr Grenzwert von $B \rightarrow \infty$ existiert und ist endlich.

Wir nennen das ein konvergentes Integral.

(10)

⑫ Analog

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx$$

⑬

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^c f(x) dx + \lim_{B \rightarrow \infty} \int_c^B f(x) dx.$$

wähle ein $c \in (-\infty, \infty)$ mit
voraussetzungen; nämlich

$$\int_A^c f(x) dx, \quad \int_c^B f(x) dx$$

existieren

ih. Grenzwerte

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^c$$

und

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_c^B$$

existieren.

⑭

Bmk Vorsicht! Die beiden Grenzwerte müssen im allgemeinen unabhängig

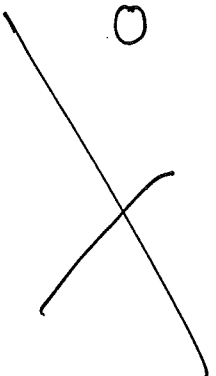
von einander genommen werden.

Bsp. $\int_{-b}^b x dx$ $\forall b > 0$.

$$\int_{-b}^b x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-b}^b = \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} = 0$$

~~$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = ?$~~

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} 0 = 0$$



Die einzelnen Grenzwerte von

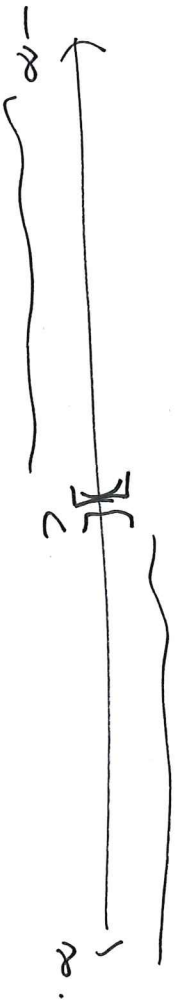
$$\int_a^b x dx \quad \text{for } b \rightarrow \infty \quad a \rightarrow -\infty$$

existieren dagegen nicht.

$$\int_a^b x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^2 - a^2}{2} \quad \text{exists nicht!}$$

Das wegen auch nicht das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$



II Unbeschränkte Integrand
 f hat ein "Pol" bei x_0 , d.h. f ist unbeschränkt bei x_0 .

$\int_a^b f(x) dx$ f ist unbeschränkt
 (i) bei der unteren Grenze a oder
 (ii) " " " oberen Grenze b oder.
 (iii) " ein Punkt c zwischen a und b .

(1) $\int_a^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow a^+} \int_A^b f(x) dx$ voraussetzen
 die Integrale $\int_A^b f(x) dx$ existieren
 die Funk von A

Genauwert $\lim_{A \rightarrow a^+}$ existiert -

$$(II) \int_a^b f(x) dx = \lim_{B \rightarrow b^-} \int_a^B f(x) dx$$

$$(III) \int_c^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow c^-} \int_c^b f(x) dx + \lim_{d \rightarrow c^+} \int_d^b f(x) dx$$



BSP.
 $a \neq 0$

$$(1) \int_a^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^{-s} dx = \begin{cases} \text{konv. gegen } -\frac{a^{1-s}}{1-s}, & s > 1 \\ \text{div. (gegen } \infty) & s \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^\infty x^{-s} dx = \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_a^\infty = \left(\frac{1}{1-s} \right) \frac{1}{x^{-1+s}} + C. \quad s \neq 1$$

$$s = 1$$

$$\int_a^b x^{-s} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^{1-s}}{1-s} \Big|_a^b \\ \ln|x| \Big|_a^b \end{array} \right.$$

$$s \neq 1$$

$$s = 1$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{b^{1-s}}{1-s} - \frac{a^{1-s}}{1-s} \\ \ln|b| - \ln|a| \end{array} \right.$$

$$s \neq 1$$

$$s = 1$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{b^{1-s}}{1-s} - \frac{a^{1-s}}{1-s} \right\} \quad \begin{array}{l} s \neq 1 \\ s = 1 \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{a^{1-s}}{1-s} \\ \infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-s}}{1-s} = \left\{ \begin{array}{l} \infty \\ 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{falls } 1-s > 0 \\ 1-s < 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} s=1 \\ 1-s > 0 \\ s < 1 \\ s \leq 1 \end{array}$$

Analysis.

⑤. For all $a < b$, $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-s}}{1-s} & \text{for } s < 1 \\ \infty & \text{for } s \geq 1. \end{cases}$$

$$\lim_{A \rightarrow a} \int_A^b \left[\frac{dx}{(x-a)^s} \right].$$

$$s \neq 1 \quad \int_A^b \frac{dx}{(x-a)^s} = \left[\frac{(x-a)^{-s+1}}{1-s} \right]_A^b$$

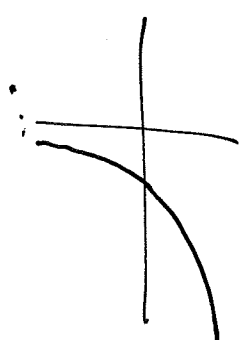
$$\left[\frac{(b-a)^{-s+1}}{1-s} - \frac{(A-a)^{-s+1}}{1-s} \right]$$

$$\underline{s=1} \quad \int_A^b \frac{dx}{(x-a)} = \ln|x-a| \Big|_A^b = \ln|b-a| - \ln|A-a|$$

$$\lim_{A \rightarrow a} \left[\frac{(b-a)^{1-s}}{1-s} - \frac{(A-a)^{1-s}}{1-s} \right]$$

$$s \neq 1$$

$$s = 1.$$



$\rightarrow -\infty.$

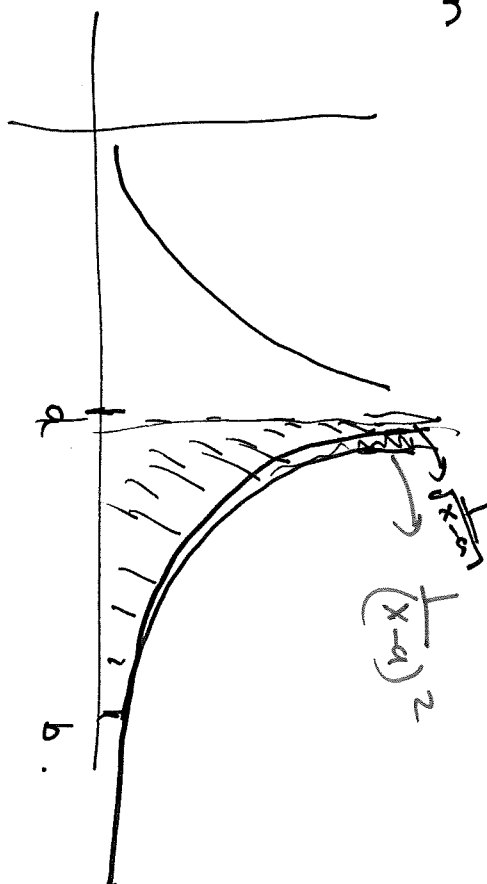
$\infty.$

$$\lim_{A \rightarrow a} (A-a)^{1-s} = \begin{cases} 0 & \infty \\ \infty & \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1-s > 0 \\ 1-s < 0. \end{matrix} = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

$$\begin{matrix} s < 1 \\ s > 1 \end{matrix}$$

$$s = 2n$$



$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}} = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{1/2}}$$

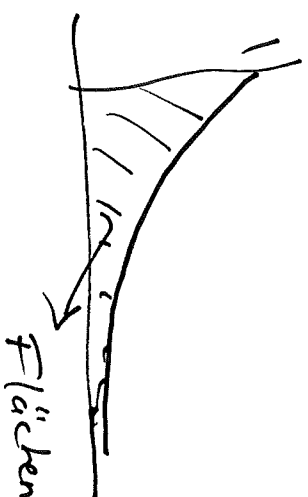
$\rightarrow \infty$ konv.

$\rightarrow \infty$ $\frac{1}{2}$.

$$\textcircled{3} \cdot \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-b} + 1$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{e^b} + 1 = 1$$



Flächeninhalt = 1.

Bmk ① Ist f schon auf $[a, b]$ definiert
und integrierbar, so existiert das uneigentliche

$$\text{Integral} \quad \lim_{a' \rightarrow a} \quad \lim_{b' \rightarrow b} \int_{a'}^{b'} f(x) dx \quad \text{und}$$

Snitt mit dem üblichen bestimmten Integral

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{überein.}$$

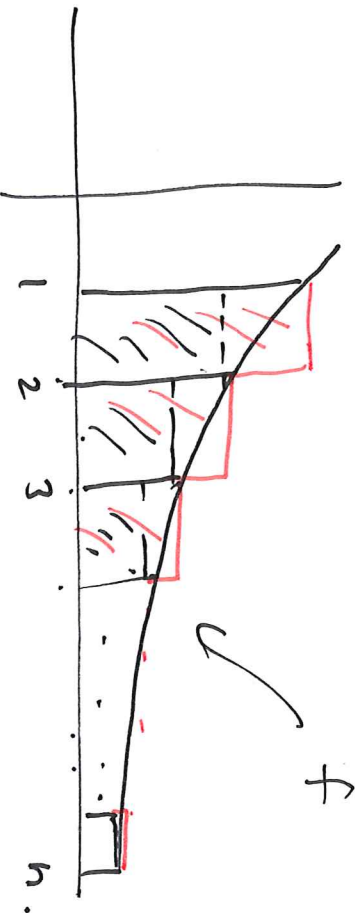
② Alle Grundeigenschaften und Integrationsmethoden
für das bestimmte Integral gelten für das
uneigentliche Integral.

Satz 6.4.1. Sei $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ monoton
 fallend. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$
 genau dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergiert

und in diesem Fall gilt

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} f(x) dx \leq f(1)$$

Beweis.



$$\begin{aligned}
 & \underbrace{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}_{\left[\sum_{k=1}^n f(k) \right] - f(n)} \geq \int_1^n f(x) dx \geq \underbrace{f(2) + f(3) + \dots + f(n)}_{\left[\sum_{k=1}^n f(k) \right] - f(1)}.
 \end{aligned}$$

$$0 \leq f(n) < \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \leq f(1) \quad (*)$$

Aus $\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x) dx$ folgt das

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty. \right]$$

Ans

$$\int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)$$

folgt dass

$$\left| \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent} \right|$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \iff \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$$

Satz (Majorantenkriterium).

a) Sei $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\forall x \quad |f(x)| < g(x)$ und $\int_a^{\infty} g(x) dx$ konvergent. Dann ist auch $\int_a^{\infty} f(x) dx$ konv.

b) Umgekehrt gilt die folgende Umkehrung.
 $\forall x \quad 0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^{\infty} g(x) dx$ divergent, so ist $\int_a^{\infty} f(x) dx$ divergent.

$$\text{Bsp.} \quad \int_1^{\infty} \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/3}} dt \leq C \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{4/3}} dt}_{\text{konv.}}$$

$$\frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/3}} < \frac{t^2}{(6t^2)^{5/3}} = \frac{1}{6^{5/3}} \cdot \frac{1}{(t^2)^{2/3}} = \frac{1}{t^{4/3}}.$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/3}} dt \quad \text{ist auch konv.}$$

Bsp. $\eta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ exist for all $s > 1$

$$\int_1^{\infty} x^{-s} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-s} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{\log |b|}{1-s} \right) \Big|_1^b$$

$$s=1$$

nicht. $s \neq 1$

$$= \text{divergent} \quad s \leq 1$$

konvergt gegen $\frac{1}{s-1}$ falls $s > 1$.

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx \leq f(1) = 1. \quad f(x) = \frac{1}{x^s}$$

$$\left\{ \frac{1}{s-1} \right\}$$

$$0 + \frac{1}{s-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

$$\leq 1 + \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{s-1} < \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \leq \frac{s}{s-1} \right|$$

$$s=2$$

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

②.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^s}$$

(Divergent)
konvergent
↕

$$f(x) = \frac{1}{x(\log x)^s}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^s} dx$$

konvergent
(divergent)

for welche s ist
 $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^s} dx$ konvergent?

$$\int \frac{1}{x(\log x)^s} dx$$

$u = \log x$
 $du = \frac{1}{x} dx$

$$\int_{\log 2}^{\infty} \frac{du}{u^s}$$

konvergent falls $s > 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^s} \text{ konv. f\"ur } s > 1$$