Uneigentliches Riemann-Integral

Defn Sei f eine Funktion auf einem offene Interal (a,b), deren Einschränkung auf jedes kompakte Interval $[a',b']$ integrierbar ist.
Dann ist das uneigentliche Integral von f von a bis b definiert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{a' \searrow a} \lim_{b' \nearrow b} \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx.$$

Falls diese Grenzwerte existieren, heisst f über (a,b) uneigentlich R. integrierbar. Wir nennen das ein konvergentes Integral

Bmk a, und b können $\pm\infty$ sein

Vorsicht! Die beiden Grenzwerte müssen im allgemeinen unabhängig voneinander genommen werden.

Bsp ① $a \neq 0$ $a > 0$.

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{b \to \infty} \int_a^b x^{-s}\,dx = \begin{cases} \text{konv. gegen } \frac{-a^{1-s}}{1-s}, & s > 1 \\ \text{div. gegen } \infty, & s \leq 1 \end{cases}$$

② Für alle $a < b$, $s \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s} = \begin{cases} \text{konv. gegen } \frac{(b-a)^{1-s}}{1-s}, & s < 1 \\ \text{div. gegen } \infty, & s \geq 1 \end{cases}$$

$$= \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta \frac{dx}{(x-a)^s}$$

Satz Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ monotone fallend

Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann, wenn

$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert. In diesem Fall gilt

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq f(1)$$

Satz (Majorantenkriterium)

a) Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig und, $\forall x$ $|f(x)| < g(x)$

und $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ konvergiert. Dann ist auf $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ konv.

b) Die Folgende Umkehrung gilt auch:

$\forall x$, $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ divergiert, so ist

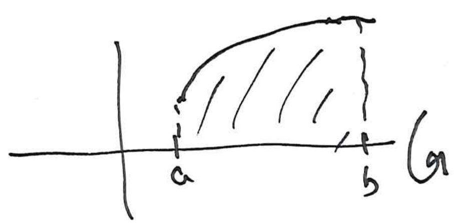
$\int_a^{b} f(x)\,dx$ divergent.

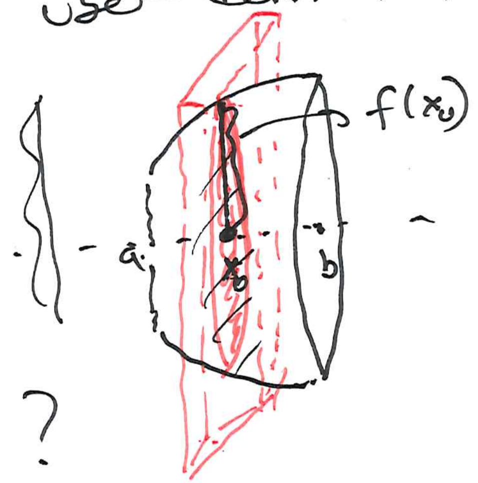
Anwendung der Integral Rechnung

I Rotationskörper:

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$, zusammen mit zwei geraden $x=a$ und $x=b$

Betrachte die Rotations des Funktionsgraphen $y=f(x)$ um die x-Achse über dem Interval $[a, b]$.





? Volumen von dieses Rotationskörper ?

Die Querschnittsfläche an jeder Stelle $x = x_0$ ist ein Kreis und gilt für die Querschnittsfläche

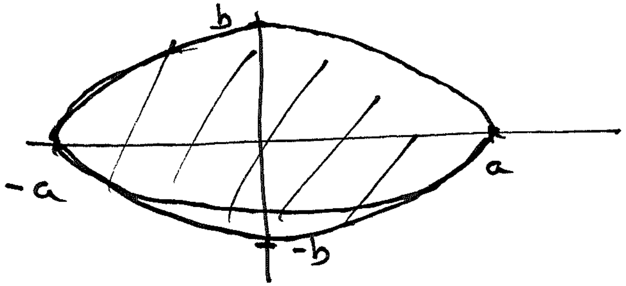
$$Q(x_0) = \pi \left(f(x_0)\right)^2$$

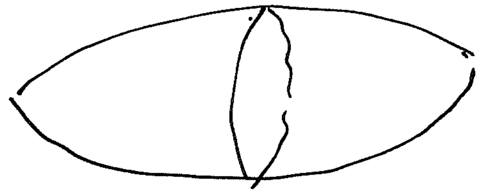
$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} V_{rot}(x_0) \overset{!}{=} \sum \pi f(x_0)^2 \Delta x$$

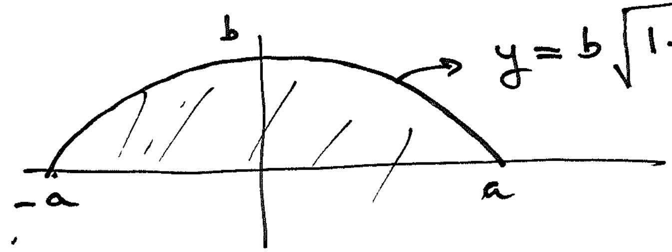
$$\Downarrow$$

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx}$$

<u>Bsp.</u>: Durch die Rotation der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit $a, b > 0$ um die x-Achse erhält man ein "Rotationsellipsoid" mit Volumen = ?







$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = f(x)$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \underbrace{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}_{(f(x))^2} dx.$$

$$= \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$= \pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \Big|_{x=-a}^{x=a} \right]$$

$$= \frac{4}{3} \pi a b^2,$$

Insbesondere bekommt man für $a=b=r$ das Volumen der Kugel um Null ist (mit radius r) $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. (DGL)

Defn: Eine Gleichung, in der Ableitungen einer gesuchten Funktion auftreten, nennt man Differentialgleichung.

Bsp.:

$y'(x) = y(x)\sin x + y^2(x)$ → grad 1

$2y''(x) + y'(x) - y(x) = \sin x$ 2

$\cos x \, y^{(5)}(x) - y(x) = 0$ 5

Defn Die Ordnung einer DGL ist der Grad der höchsten auftretenden Ableitung.

Hängt die gesuchte Funktion in der DGL nur von einer variablen ab, so spricht man von einer gewöhnliche DGL (ordinary D.E).

Bsp.

Beim radioaktiven Zerfall haben wir

$$\boxed{f'(t) = -\alpha f(t)} \qquad f(0) = F_0$$

wobei $f(t)$ ist noch vorhandenen Mass eines Stoffes.

Pro Zeiteinheit zerfallende Masse ist proportional zur noch vorhandenen Masse.

Diese DGL haben wir schon gesehen.

$$f(t) = K e^{-\alpha t}$$

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = -\alpha f$$

$$\Longrightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = -\alpha \Longrightarrow \underbrace{\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt}_{} = -\int \alpha \, dt$$

$$f(t) = u \qquad \int \frac{du}{u}. \qquad \ln|f(t)| = -\alpha t + C$$
$$f'(t)dt = du$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = e^{-\alpha t + c} = e^{-\alpha t} \cdot \underbrace{e^{c}}_{K} = \underline{\underline{K}}\, e^{-\alpha t}.$$

<u>Bmk</u>. Es gibt ~~unendl~~ unendlich viele Lösungen der DGL.

Eine DGL n-ter Ordnung besitzt in der Regel eine von n reellen Parametern abhängige Familie von Lösungen.

Eine eindeutige Lösung auszusondern erfordert in der Regel noch n zusätzliche "<u>Nebenbedingungen</u>".

<u>Defn</u> Eine DGL n-ter Ordnung für eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ zusammen mit den Nebenbedingungen der Form

$$\underline{y^{(k)}(a) = y_{a,k}} \qquad 0 \leq k \leq n-1$$

für einen gegebenen Punkt $a \in I$, heisst ein <u>Anfangswertproblem</u>. (AWP)

__Bsp.__ AWP $\begin{cases} f'(t) = -\alpha f \\ f(0) = 10 \end{cases} \Longrightarrow \quad f(t) = K e^{-\alpha t}$

$f(0) = K e^{-0} = K = 10$,

$$\boxed{f(t) = 10 e^{-\alpha t}}.$$

② Eine DGL für eine Funk $y: I \to \mathbb{R}$ zusammen mit Nebenbedingungen der Form

$$y(a_i) = y_i \qquad 0 \leq i \leq n-1$$

für gewisse Punkte $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ heisst eine __Randwertproblem__ (RWP).

__Bsp.__

RWP. $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) = \sin t \\ y(0) = 1 \\ y(\pi/2) = 1 \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ Randwert Bedingungen.

AWP $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) = \sin t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ Anfangswert Bed.

Wir beginnen mit der DGL erster Ordnung.

d.h. Eine DGL der Form $y' = f(x,y)$

z.B.
$$y' = 2xy + y$$
$$y' = \sin xy + x^2$$

Separierbare DGL.

Defn. Eine separierbare DGL (erster Ordnung) (oder DGL mit trennbaren Variablen) ist eine DGL der Form

$$y' = g(x)\,h(y)$$

Diese hat die konstante Lösungen $y = y_0$ für alle y_0 mit $h(y_0) = 0$.

Für die nichtkonstante Lösung zu finden, können wir die "Variablen trennen" durch die formale Umformung.

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) \iff \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx$$

<u>Bsp.</u> $y' = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x\,dx$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{dy}{y}}_{\ln|y|} = \int 2x\,dx = x^2 + c \;\Bigg\}\Longrightarrow \begin{array}{l} \ln|y| = x^2 + c. \\ y = e^{x^2+c} = K e^{x^2}, \quad K > 0. \end{array}$$

Hier $y = 0$ ist auch eine Lösung. In diesem Fall kann man diese Lösung auch als die Lösung $y(x) = Ke^{x^2}$ mit $K = 0$ schreiben.

Verifizieren: $y = Ke^{x^2}$

<u>LHS</u>. $y' = Ke^{x^2} \cdot 2x \quad = \quad 2xy = 2xKe^{x^2}$ ✓

Aber diese gilt für alle $K \in \mathbb{R}$. $\quad y = Ke^{x^2},\ K \in \mathbb{R}$.

<u>Bsp.</u> $\quad y' = 1 + y^2 \quad$ ist separierbar.

Da $1+y^2 > 0$ ist, hat diese DGL keine Konstante $y=c$ Lösung.

$$\frac{dy}{dx} = 1+y^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$$

$$\arctan y = x + c$$

$$y = \tan(x+c).$$

Es gibt auch DGL, die nach einer Substitution separierbar werden.

<u>z.B.</u> ① Falls $y' = f(ax+by+c)$ ist, dann kann man die Substitution $u = ax+by$ oder $u = ax+by+c$

$u(x) = ax + b(y(x))$

$u' = a + by'$

<u>**Bsp.**</u> $\left.\begin{aligned} y' &= (4x-y+1)^2 \\ y(0) &= 2. \end{aligned}\right\}$ AWP.

Sei $u = 4x-y \Rightarrow u' = 4 - y' \Rightarrow y' = 4-u'$

$y' = (u+1)^2$

$4-u' = (u+1)^2 \Rightarrow u' = 4-(u+1)^2 = 3-2u-u^2$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -(u^2+2u-3). \Rightarrow \int \frac{du}{u^2+2u-3} = \int -\,dx$

$$\int \frac{du}{(u-1)(u+3)} = -x + C.$$

$$\frac{1}{(u-1)(u+3)} = \frac{A}{(u-1)} + \frac{B}{u+3} \Rightarrow A(u+3) + B(u-1) = 1.$$

$u = 1 \Rightarrow A.(1+3) = 1 \Rightarrow A = 1/4$

$u = -3 \Rightarrow B(-3-1) = 1 \Rightarrow B = -1/4$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+3}\, du = -x + C.$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{4}} \ln\left|\frac{u-1}{u+3}\right| = -4x + 4C = -4x + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \frac{u-1}{u+3} = Ke^{-4x} \Rightarrow u - 1 = (u+3)Ke^{-4x}$$

$$u - 1 = uKe^{-4x} + 3Ke^{-4x}$$

$$u(1-Ke^{-4x}) = 1+3Ke^{-4x}$$

$$u = \frac{1+3Ke^{-4x}}{1-Ke^{-4x}} \quad \underset{\text{Rücksetzen}}{\Longrightarrow} \quad 4x-y = \frac{1+3Ke^{-4x}}{1-Ke^{-4x}}$$

$$\boxed{y = 4x - \frac{1+3Ke^{-4x}}{1-Ke^{-4x}}}$$

Jetzt bestimmen wir die Integrationskonstante K mit der Anfangsbedingung $y(0)=2$.

$$2 = y(0) = 4\cdot 0 - \frac{1+3K}{1-K} = \boxed{\frac{1+3K}{K-1} = 2}$$

$$1+3K = 2K-2 \Rightarrow \boxed{K=-3}$$

$$\left.\begin{array}{l} y' = (4x-y+1)^2 \\ y(0)=2 \end{array}\right\} \text{AWP}$$

hat die Lösung.

$$y = 4x - \left(\frac{1-9e^{-4x}}{1+3e^{-4x}}\right)$$

Bsp. Falls $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, funktioniert oft die Substitution $u = y/x$

$$x y' = y - \sqrt{xy}$$

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{\sqrt{xy}}{x} = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{xy}{x^2}} = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

$u = y/x$.

$$u x = y,$$
$$u' x + u \cdot 1 = y'$$

$$y' = u - \sqrt{u}$$

$$u' x + u = u - \sqrt{u}.$$

$$u' x = -\sqrt{u}.$$

$$\boxed{\frac{du}{dx} \cdot x = -\sqrt{u}} \Longrightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{u} = -\ln|x| + c.$$

$$u = \left[-\frac{1}{2} \ln|x| + c\right]^2. \xrightarrow{\text{Rücksetzen}} \frac{y}{x} = \left[-\frac{1}{2} \ln|x| + c\right]^2$$

$$\boxed{y = x\left[-\frac{1}{2}\ln|x| + c\right]^2}.$$

<u>Bmk.</u> Die konstante Nullfunktion $u \equiv 0$ (d.h. $y \equiv 0$) ist auch eine Lösung von $u' = \left(-\frac{\sqrt{u}}{x}\right)$.

Und deswegen auch $y \equiv 0$ ist eine Lösung von

$xy' = y - \sqrt{xy}$; Diese kann man einfach verifizieren.

<u>Bsp.</u> $\boxed{xyy' + 4x^2 + y^2 = 0}$

$$\left.\begin{array}{l} y(2) = -7 \\ x > 0. \end{array}\right\} \text{Nebenbedingungen.}$$

$$\frac{xyy'}{x^2} = \frac{-4x^2 \cancel{-} y^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right) y' = -4 - \left(\frac{y^2}{x^2}\right) \quad , \quad \frac{y}{x} = u \qquad y = ux$$
$$y' = u'x + u$$

$$\Rightarrow u(u'x + u) = -4 - u^2 \quad \Rightarrow uu'x + u^2 = -4 - u^2$$

$$\Rightarrow uu'x = -4 - 2u^2 \quad \Rightarrow u'x = \frac{-4-2u^2}{u}.$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = -\frac{4-2u^2}{u} \quad \Rightarrow \int \frac{u\,du}{+4+2u^2} = \int -\frac{dx}{x}$$

$$\boxed{\frac{1}{4} \ln|4+2u^2| = -\ln|x| + C}$$