Differentialgleichungen

I **Separierbare DGL** ist eine der Form

$$y' = g(x)\,h(y)$$

Diese DGL lassen sich mit der Methode Trennung der Variablen lösen.

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx.} \quad , \text{ falls } h(y) \neq 0$$

Bmk: $y' = g(x)h(y)$ hat immer die konstanten Lösungen $y = y_0$ für alle~~s~~ y_0 mit $h(y_0) = 0$.

II. Lineare DGL ist eine der Form

$$Ly := a_n(x)\,y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)\,y(x) = b(x).$$

Ist $b(x) \equiv 0$, so heisst die DGL $Ly = 0$ homogen

andernfalls $(b(x) \neq 0)$ inhomogen.

n = Ordnung der DGL. $b(x)$ heisst die Störfunktion

Für eine Lineare DGL, haben wir die Folgende Sätze.

Satz Sei I ein Interval. Für je zwei auf I definierte Lösungen $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ der DGL $Ly_i(x) = 0$ (Homogen DGL) und je zwei Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, ist auch $\alpha y_1 + \alpha y_2$ eine Lösung von $Ly = 0$.

d.h $V_H^L := \{ y : I \to \mathbb{R} \mid Ly(x) = 0 \}$ ist ein Vektorraum der dim n.

$=$ Die Lösungsmenge der DGL $Ly = 0$.

Sei $\{y_1^H, \dots, y_n^H\}$ eine Basis des V. Raums $V_H^L = \{y \mid Ly = 0\}$.

Die Lösungen $y_1^H \dots y_n^H$ heissen Fundamentallösungen.

Die Allgemeine Lösung der $Ly = 0$ ist eine Lineare Kombination der Fundamentalelösungen; $y = \alpha_1 y_1^H + \alpha_2 y_2^H + \dots + \alpha_n y_n^H$.

Satz Sei $Ly = b(x)$ eine inhom DGL. (Linear).

Sei $y_p : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL $Ly = b(x)$.

y_H ist eine Lösung der zugehörigen Homogene DGL; $Ly = 0$

$\Longleftrightarrow$ $y_H + y_p$ ist eine Lösung von $Ly = b$.

$$\left(L(y_H + y_p) = Ly_H + Ly_p = 0 + b = b. \right)$$

Kor Die Allgemeine Lösung einer inhom. Linear DGL $Ly = b$ findet man, indem die Allgemeine Lösung y_H der zugehörigen Hom. Gleichung $Ly = 0$ zu einer beliebig gewählten Partikulären Lösung y_p der inhom. DGL $Ly = b$ addiert.

d.h Die Allgemeine Lösung der DGL $Ly = b$ hat der Form

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= y_p(x) + y_H(x) \\ &= y_p(x) + \alpha_1 y_1^H + \alpha_2 y_2^H + \cdots + \alpha_n y_n^H \end{aligned}}$$

wobei α_i Konstenten, y_i^H fund. Lösungen der Hom. DGL $Ly = 0$.

Satz (Superposition Prinzip) Ist y_j^p eine Partikuläre Lösung der DGL $Ly = b_j$ $j = 1, \dots, r$

So ist $y_1^p + y_2^p + \dots + y_r^p$ eine Partikulare Lösung der DGL $Ly = b_1 + b_2 + \dots + b_r$.

Satz: Jede Anfangswertproblem

$$\begin{cases} Ly = b \\ y^{(k)}(x_0) = y_{0,k} \end{cases} \longrightarrow \quad y = y_P + y_H = y_P + \underbrace{\alpha_1 y_1^H + \alpha_2 y_2^H + \dots + \alpha_n y_n^H}_{y_H} \qquad Ly_H = 0.$$

$$0 \leq k \leq n-1$$

besitz eine eindeutige Lösung ($y: I \to \mathbb{R}$).

Homogene Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

$$Ly = \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0 y^{(0)} = 0. \qquad a_i \in \mathbb{C}.$$

Defn Das zugehörige Polynom

$P_L(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$ heisst das

characteristische Polynom von L

Seine Nullwerte in $\mathbb{C}$ heissen die Eigenwerte von L.

Satz Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $Le^{\lambda x} = P_L(\lambda)e^{\lambda x}$.

Insbesondere gilt $Le^{\lambda x} = 0$ genau dann, wenn λ ist ein Nullstelle von $P_L(\lambda) = 0$.

(d.h λ ist ein Eigenwerte von L).

Satz Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die Paarweise verschiedenen Eigenwerte von L mit den entsprechenden Multiplizität $m_1, m_2, \dots, m_r$, so bilden die Funktionen

$$P_L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

$$y_{j,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$x \to x^k e^{\lambda_j x} \quad \text{für alle} \quad 1 \leq j \leq r, \quad 0 \leq k \lneq m_j$$

eine System von Fund. Lösungen der Hom. DGL $Ly = 0$

Bmk. Hat L reelle Koeffizienten ($a_i \in \mathbb{R}$) so hat jedes Paar komplex konjugierter nicht-reelle E-werte $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ dieselbe Multiplizität m_j. Die entsprechenden Fund. Lösungen

$$x^k e^{(\alpha_j \pm i\beta_j)x} = x^k e^{\alpha_j x} (\cos\beta_j x + i \sin\beta_j x), \quad 0 \leq k < m_j$$

kann man ersetzen mit die Lösungen

$$x^k e^{\alpha_j x} \cos\beta_j x \quad \text{und} \quad x^k e^{\alpha_j x} \sin\beta_j x.$$

Bsp. $y^{(4)} + 2y^{(2)} - 8y' + 5y = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5$$
$$= (\lambda - 1)^2 (\lambda^2 + 2\lambda + 5)$$

λ: 1 mit multipli. 2

$-1 \pm 2i$ " " 1.

$$y_H(x) = \underbrace{a e^x + b x e^x}_{\text{Für } \lambda = 1} + \underbrace{c e^{-1x} \cos 2x + d e^{-x} \sin 2x}_{\text{Für } \lambda = -1 \pm 2i}$$

$$\boxed{\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = 0}.$$

Setze

$$\begin{aligned} x_0(t) &:= y(t) \\ x_1(t) &:= y'(t) \\ x_2(t) &:= y''(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(t) &:= y^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{n-1}'(t) &= -a_{n-1}x_{n-1} - a_{n-2}x_{n-2} + \dots - a_0 x_0 \\ x_0'(t) &= x_1(t) \\ x_1'(t) &= x_2(t) \\ &\vdots \\ x_{n-2}'(t) &= x_{n-1}(t) \end{aligned}\right\}.$$

Lineare system von DGL erster Ordnung.

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & & \\ & & & & & & \\ 0 & \cdots & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = P_L(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0,$$

Inhomogen Linear DGL mit Konst. Koef.

$$Ly = b(x)$$

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{n-1}(x) + \cdots + a_0 y(x) = b(x).$$

mit $b(x)$ eine von $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, Poly oder eine Kombinationen von diese Funktionen.

Ziel: Eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ finden.

Methode: "Methode der unbestimmten Koeffizienten"

① Wir wählen eine Lösungs Ansatz "Ansatz vom Typ der Rechten Seite".

② Wir setzen den Ansatz in die DGL ein und machen einen Koeffizientenvergleich.

Idee: Hier geht man davon aus, dass die Lösung die Gleiche Gestallt wie die Störfunktion $b(x)$ haben wird.

z.B. Ist die Störfunktion $b(x)$ ein Polynom, so nimmt man an, dass die Lösung auch ein Poly- sein wird.

Bsp.: $y'' + y' - 6y = 3e^{-4x}$

Die zugehörige Homog. DGL ist

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$

$\lambda_{1,2} = 2, -3$

$y_H = c_1 e^{+2x} + c_2 e^{-3x}.$

Die Inhom DGL lösen wir durch ein expliziten Ansatz

① $y_p(x) = K e^{-4x} \Rightarrow$ Ansatz!

② Setzen wir diese ein in $y'' + y' - 6y = 3e^{-4x}$.

$y_p'(x) = -4K e^{-4x}$

$y_p''(x) = 16 K e^{-4x}$

$16 K e^{-4x} + (-4 K e^{-4x}) - 6 K e^{-4x} = 3 e^{-4x}$

$6 K e^{-4x} = 3 e^{-4x}$

③ Koeffizientenvergleich $\Rightarrow K = 3/6 = \frac{1}{2}$.

$y_p = \frac{1}{2} e^{-4x}$ ist die partikuläre Lösung $y'' + y' - 6y = 3e^{-4x}$.

Allgemeine Lösung: $y_p + y_H = \underbrace{\frac{1}{2} e^{-4x}}_{y_p} + \underbrace{c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}}_{y_H}$.

Bsp. 2 $\quad y'' + y' - 6y = 50 \sin x \quad (\rightsquigarrow \lambda = \pm i)$.

Wir Wählen als Ansatz von Typ der rechten Seite

$$y_p(x) = K_1 \sin x + K_2 \cos x$$

$$y_p' = K_1 \cos x - K_2 \sin x$$

$$y_p'' = -K_1 \sin x - K_2 \cos x$$

$$\underbrace{(-K_1 \sin x - K_2 \cos x)}_{y''} + \underbrace{(K_1 \cos x - K_2 \sin x)}_{y'} - 6 (K_1 \sin x + K_2 \cos x) = 50 \sin x$$

$$= (-7K_1 - K_2) \sin x + (K_1 - 7K_2) \cos x = 50 \sin x$$

$$\left.\begin{aligned} -7K_1 - K_2 &= 50 \\ K_1 - 7K_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} K_1 &= -7 \\ K_2 &= -1 \end{aligned} \qquad y_p = -7 \sin x - \cos x,$$

Allgem. Lösung: $y = y_p + y_H = -7\sin x - \cos x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$

$$\left.\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i\sin x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

Ansatzmethode.

Störfunktion $b(x)$	Zugehörige Ansatz für $y_p(x)$.
$a e^{\mu x}$	$b e^{\mu x}$
$a \sin(\nu x)$ $b \cos(\nu x)$	$c \sin(\nu x) + d \cos(\nu x)$
$a e^{\mu x} \sin(\nu x)$ $b e^{\mu x} \cos(\nu x)$	$e^{\mu x} (c \sin \nu x + d \cos \nu x)$.
$P_n(x) e^{\mu x}$	$R_n(x) e^{\mu x}$
$P_n(x) e^{\mu x} \sin \nu x$ $Q_n(x) e^{\mu x} \cos \nu x$	$e^{\mu x} (R_n(x) \sin \nu x + S_n(x) \cos \nu x)$.

wobei P_n, Q_n, R_n, S_n Polynome vom Grad n (in x) sind.

$\lambda = \mu \pm i\nu$

Bmk ① Liegt eine Linearkombination der Störfunktion vor, so hat man als Ansatz eine entsprechende Lineare komb. zu wählen.

Bsp. ① $y'' + y' - 6y = 3e^{-4x} \rightsquigarrow y_{p_1} = Ke^{-4x}$

② $y'' + y' - 6y = 50\sin x \rightsquigarrow y_{p_2} = K_1 \sin x + K_2 \cos x$

③ $y'' + y' - 6y = 3e^{-4x} + 50\sin x \rightsquigarrow y_p = Ke^{-4x} + K_1 \sin x + K_2 \cos x$

Auch mit Superposition prinzip.

$y_{p_1} = \frac{1}{2}e^{-4x}$ $\qquad y_{p_2} = -7\sin x - \cos x$

~~P Lo~~ Partikuläre Lösung $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{1}{2}e^{-4x} - 7\sin x - \cos x$.

4. $y'' + y' - 6y = 10e^{2x}$

Wenn wir den Ansatz

$$y_p = Ke^{2x}$$ benutzen . . . . . .

$$y_p'' = 4Ke^{2x}$$

$$y_p' = 2Ke^{2x}$$

$$\underbrace{4Ke^{2x} + 2Ke^{2x} - 6Ke^{2x}}_{0} = 10e^{2x} \quad ?\,?$$

Problem!! Ein Problem ergibt sich, wenn als Störfunktion eine Lösung der Homog. DGL erscheint!

Bmk: Falls $\lambda = \mu + i\nu$ eine m-Fache Nullstelle des Char. Polyns von $Ly \equiv 0$ ist, muss man den Ansatz $y_p(x)$ mit dem Faktor x^m multiplizieren.

· Als Ansatz nehmen wir statt $y_p = Ke^{2x}$,

$$y_p = Kxe^{2x}$$

$$y'(x) = Ke^{2x} + 2Kxe^{2x}$$

$$y''(x) = 2Ke^{2x} + 2K\left[e^{2x} + 2xe^{2x}\right] = 4Ke^{2x} + 4Kxe^{2x}$$

$$y'' + y' - 6y = \underbrace{4Ke^{2x} + 4Kxe^{2x}}_{y''} + \underbrace{Ke^{2x} + 2Kxe^{2x}}_{y'} - 6Kxe^{2x} = 10e^{2x}$$

$$5Ke^{2x} = 10e^{2x} \Rightarrow K = 2.$$

$$\boxed{y_p = 2xe^{2x}} \qquad (2xe^{2x})'' + (2xe^{2x})' - 6(2xe^{2x}) = 10e^{2x}.$$

Allg. Lösung $\quad y = y_p + y_H = 2xe^{2x} + \underbrace{c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}}_{y_H}$

Bsp. Anfangswert Problem.

$$\begin{cases} y'' + y' - 6y = 10e^{2x} \\ \boxed{\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 7 \end{array}} \end{cases} \rightsquigarrow y = \underline{2xe^{2x}} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x},$$

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0.$$

$$y'(x) = 2e^{2x} + 4xe^{2x} + 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$$

$$y'(0) = 2 + 0 + 2c_1 - 3c_2 = 7$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - 3c_2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = -c_2 \\ -5c_2 = 5 \Rightarrow c_2 = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -1. \end{array}$$

$$\boxed{y(x) = 2xe^{2x} + e^{2x} - e^{-3x}}$$

Lineare DGL erster Ordnung mit allgemeinen Koeffizienten

$$y' = a(x)y + b(x).$$

Die zugehörige homogene Gleichung

$$y'(x) = a(x)y$$ ist separierbar.

Eine Lösung findet man durch "separation"

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx \Longrightarrow \log y = \int a(x)dx + C$$

$$\Longrightarrow y = e^{\int a(x)dx + C} = K e^{A(x)}$$

wobei $A(x) := \int a(x)\,dx$

Satz: Die Allgemeine Lösung der Hom. DGL $\boxed{y' = a(x)y}$ ist $y(x) = K e^{A(x)}$ wobei $K \in \mathbb{R}$ und $A'(x) = a(x)$

Bsp. $xy' - 2y = 0 \qquad x \neq 0.$

$$y' - \frac{2}{x} y = 0 \Rightarrow y' = \frac{2}{x} y.$$

$$a(x) = \frac{2}{x}$$

$$A(x) = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\log|x| + c = \log x^2 + c.$$

$$e^{A(x)} = e^{\ln x^2 + c} = K e^{\ln x^2} = \boxed{K x^2 = y_H}$$

Inhom. fall

$$\underline{y' = a(x)\, y + b(x)}.$$

Eine Lösung der inhom Gleichung findet man durch "Variation der Konstanten"

Das heisst durch den Ansatz $y(x) = \lambda(x) e^{A(x)}$ für eine noch zu bestimmenden Funktion $\lambda(x)$

Nach Einsetzen und Ausrechnen wird die Inhom. DGL äquivalent zu $\lambda'(x) = b(x) e^{-A(x)}$

Integrieren und Rücksetzen liefert dann die Lösung.

$$y_p(x) = e^{A(x)} \int b(x) e^{-A(x)}\, dx.$$

Sei $y_p(x) = \lambda(x)\, e^{A(x)}$ eine Lösung

$A(x) = \int a(x)\,dx$.

(1) Einsetzen: $y_p' = \lambda'(x)\, e^{A(x)} + \lambda(x)\, e^{A(x)} \cdot \underbrace{A'(x)}_{a(x)}$

$= \lambda'(x)\, e^{A(x)} + a(x) \underbrace{\lambda(x) e^{A(x)}}_{y_p}$

$$y_p' = \lambda'(x)\, e^{A(x)} + a(x)\, y_p = a(x)\, y_p + b(x).$$

$$\Rightarrow \lambda'(x)\, e^{A(x)} = b(x).$$

$$\Rightarrow \lambda'(x) = e^{-A(x)}\, b(x)$$

$$\Rightarrow \lambda(x) = \int b(x)\, e^{-A(x)}\,dx$$

$$y_p(x) = \lambda(x)\, e^{A(x)} = \left(\int b(x)\, e^{-A(x)}\,dx\right) e^{A(x)} \qquad A'(x) = a(x)$$