Lineare Differentialgleichungen

$$L := a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_0(x)$$

$Ly(x) = b(x)$ ist eine Lineare DGL.

Homogene Fall $\quad b(x) \equiv 0$

Satz: Für je zwei auf I definierte Lösungen y_1, y_2 der Homogene DGL $Ly = 0$, und je zwei Konstanten α_1, α_2 ist auch $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ eine Lösung

d.h $\quad V_{L,H} := \{ y : I \to \mathbb{R} \mid Ly = 0 \}$ ist ein Vektorraum.

Satz Sei $a_n(x) \equiv 1$ und seien die Funktionen $a_1 \dots a_n, b$ stetig

Dann gilt: Die auf I definierten Lösungen von $Ly = 0$ bilden einen Vektorraum der Dimension n.

Die Elemente einer gewählten Basis des $V_{L,H}$ heissen Fundamentallösungen. Sei $\{y_1, \dots y_n\}$ eine Basis von $V_{L,H}$

Die Allgemeine Lösung ist eine Lineare Kombination der Fundamentallösungen

$$y_h = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n.$$

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Homogene Fall: $L = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_0$

$P_L(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$, das Characteristische Polynom.

Satz Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $Le^{\lambda x} = P_L(\lambda)e^{\lambda x}$

Insbesondere $Le^{\lambda x} = 0 \iff \lambda$ ~~ist~~ ein Eigenwert von L ist

$\iff P_L(\lambda) = 0$.

Satz Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von L mit den entsprechenden Multiplizäten $m_1, \dots, m_r$, so bilden die Funktionen

$$y_{j,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto x^k e^{\lambda_j x} \qquad 1 \le j \le r, \qquad 0 \le k < m_j$$

ein System von Fund. lösungen der Homogenen DGL $Ly = 0$.

Bsp. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2 = (\lambda+i)^2(\lambda-i)^2.$$

$$y_H(x) = c_1 e^{ix} + c_2\, x e^{ix} + c_3 e^{-ix} + c_4\, x e^{-ix}$$

$$= d_1 \cos x + d_2 \sin x + d_3\, x \cos x + d_4\, x \sin x.$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

1

Inhomogene Lineare DGL. $Ly = b$.

Satz Für jede auf I definierte Lösung y_p der inhomogenen Gleichung $Ly=b$ und jede auf I definierte n-mal differenzierbare Funktion y_H ist $y_p + y_H$ eine Lösung von $Ly=b$ genau dann, wenn y_H ist eine Lösung der homogenen Gleichung $Ly=0$.

Kor Die allgemeine Lösung einer inhom. lin. DGL $Ly=b$ hat der Form

$$y = y_p + y_H$$
$$= y_p + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$$

wobei y_p ist eine Partikuläre Lösung der $Ly=b$

$y_1, \dots y_H$ sind Fundamentallösungen der $Ly=0$.

Satz Sei $a_1(x), \dots a_n(x), b(x)$ stetig. Dann gilt:

Für jeden Anfangswerte besitzt $Ly = b$ eine eindeutige auf ganz I definierte Lösung.

$$\left.\begin{matrix} \left(\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots a_0(x)\right)y = 0 \\ \left.\begin{matrix} y(0) = Y_1 \\ y'(0) = Y_2 \\ \vdots \\ y^{n-1}(0) = Y_{n-1} \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\}$$

hat eine eindeutige Lösung.

Satz (Superposition Prinzip). Ist y_j eine Partikuläre Lösung der DGL $Ly = b_j$ für jedes j, so ist $y_1 + \dots + y_r$ eine Partikulärelösung der DGL $Ly = b_1 + \dots + b_r$.

Inhomogene Lineare DGL mit Konst Koeffizienten.

$$Ly = \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 y = b(x)$$

$Ly = b$ löst man durch expliziten Ansatz und Koeffizientenvergleich.

„Ansatz vom Typ der rechten Seite“

• Störfunktion $b(x)$	Ansatz für $y_p(x)$
$a e^{\mu x}$	$b e^{\mu x}$
$a \sin(\nu x)$ $b \cos(\nu x)$	$c \sin(\nu x) + d \cos(\nu x)$
$a e^{\mu x} \sin(\nu x)$ $b e^{\mu x} \cos(\nu x)$	$e^{\mu x}(c \sin \nu x + d \cos \nu x)$
$P_n(x) e^{\mu x}$	$R_n(x) e^{\mu x}$
$a P_n(x) e^{\mu x} \sin \nu x$ $b P_n(x) e^{\mu x} \cos \nu x$	$e^{\mu x}(R_n(x) \sin \nu x + Q_n(x) \cos \nu x)$

Bmk 1. Liegt ein Lin. kombinationen der Störfunktionen vor, so hat man als Ansatz eine entsprechende Lin. kom zu wählen

2. Falls $\mu + i\omega$ eine m-fache Nullstelle des char. Poly. $P_L(\lambda)$ ist, so muss man den Ansatz für $y_p(x)$ mit dem Faktor x^m multiplizieren.

Zusatzbedingungen

Die in der allgemeinen Lösung einer DGL n-ter Ordnung auftretenden Parametern lassen sich durch Zusatzbedingungen festlegen.

Bsp.

$$\left.\begin{array}{l} y'' + y' - 6y = 10e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 7 \end{array}\right\} \text{ hat die Lösung } \quad y = -e^{-3x} + e^{2x} + 2xe^{2x}$$

$$P_L(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

$$y_H = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}.$$

Für y_p, als Ansatz nehmen wir $y_p = Kxe^{2x}$

Mit einsetzen und Koeffizienten vergleich erhalten wir

$$y_p'' + y_p' - 6y_p = 10e^{2x} \Longrightarrow K = 2.$$

Allgemeine Lösung $\quad y = y_p + y_H = 2xe^{2x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$

Anfangsbedingungen $\Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) = -3c_1 + 2c_2 + 2 = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{array}$$

Lineare DGL erster Ordnung mit nicht konst. Koeff.

$$y' = a(x)\,y + b(x).$$

Homog. Lösung: $y' = a(x)y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx$

$$\Rightarrow y_H = e^{\int a(x)dx} = e^{A(x)+C} = K e^{A(x)}$$

$A(x) = \int a(x)\,dx.$

$A'(x) = a(x).$

Inhom. Lösung. **Ansatz:** $y(x) = \lambda(x)\,e^{A(x)}$

Einsetzen $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda'(x) = b(x)\,e^{-A(x)}}$

$$\Rightarrow \lambda(x) = \int b(x)\,e^{-A(x)}$$

$$\Rightarrow y_p = \lambda(x)\,e^{A(x)} = e^{A(x)} \int b(x)\,e^{-A(x)}$$

Allg. Lösung: $y = y_H + y_p = K e^{A(x)} + e^{A(x)} \int b(x)\,e^{-A(x)}\,dx.$

Oder Lösung mithilfe der "Integrierenden Faktors".

(0) $y' = a(x)y + b(x)$

(1) Multipliziere beide Seiten mit

$$v(x) := e^{-\int a(x)\,dx} = e^{-A(x)\,dx}$$ ← Integrierender Faktor

$$y' e^{-\int a(x)\,dx} = \boxed{a(x) y\, e^{-\int a(x)\,dx}} + b(x)\, e^{-\int a(x)\,dx}.$$

$$\underbrace{y' e^{-\int a(x)dx} - a(x) y\, e^{-\int a(x)dx}}_{\frac{d}{dx}\left(y e^{-\int a(x)dx}\right)} = b(x)\, e^{-\int a(x)\,dx}.$$

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{-\int a(x)dx}\right) = b(x)\, e^{-\int a(x)dx} = b(x) e^{-A(x)}.$$

② Integriere beide Seiten.

$$y e^{-A(x)} = \int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p = e^{A(x)} \int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx.}$$

<u>Bsp:</u> $xy' - 2y = 2x^4$, $x \neq 0$. $[x = 0 \Rightarrow y = 0]$.

$y' - \frac{2}{x} y = 2x^3$

$y' = \underbrace{\frac{2}{x}}_{a(x)} y + \underbrace{2x^3}_{b(x)}$

$a(x) = \frac{2}{x}$, $A(x) = \int a(x)\,dx = \cancel{\ln x^2}$

$\int \frac{2}{x}\, dx$.

$= 2 \ln|x|$

$= \ln x^2$

$$y_p = e^{\ln x^2} \int 2x^3 e^{+\ln(x^2)^{-1}}\, dx = x^2 \int 2x^3 \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= x^2 \int 2x\, dx = x^4 \Rightarrow \text{Partikuläre Lösung}$$

$$\boxed{y_p = x^4}$$

Homogene

$$y' = \frac{2}{x} y \implies \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} y \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}\, dx$$

$$\implies \ln y = \ln x^2 + c.$$

$$\implies y_H = K x^2.$$

$$\boxed{y = y_P + y_H = x^4 + K x^2.}$$

$$x\left[4x^3 + 2Kx\right] - 2\left[x^4 + Kx^2\right] \stackrel{?}{=} 2x^4$$

$$4x^4 + \cancel{2Kx^2} - 2x^4 - \cancel{2Kx^2}$$