Aufgabe 1, Berechnung dreidimensionaler Flächen

Theorie

- Bei Funktion von 3 Variablen($f(x, y, z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) wird jedem Punkt im Raum ein Wert zu geordnet.
- Eine Niveaumenge ergibt sich aus allen Punkten, denen der gleiche Wert zugeordnet wird durch $f(x, y, z)$ also $f(x, y, z) = c, (c\ ist\ konstant)$
- Die Niveaumenge bildet im Definitionsbereich eine Fläche.
- Der Gradient steht überall senkrecht zur Niveaumenge. Der Gradient einer Funktion kann durch partielle Ableitungen von $f(x, y, z)$ berechnet werden. Der Gradient heisst dann: $grad\ f(fx, fy, fz)$

Aufgaben

a) **Wie ist das SE im Raum positioniert, d.h. wie liegen die Achsen und wo ist der Ursprung/Mittelpunkt?**

Der Mittelpunkt befindet sich im Ursprung, das SE ist drehsymmetrisch um jede Koordinatenachse.

b) **Wie gross ist die Ausdehnung des SEs, d.h. wo sind die Punkte mit der jeweils kleinsten bzw. grössten x,y und z Koordinate?**

a,b,c bestimmen die Ausdehnungen in jeweils x,y,z Richtung.

Löst man zum Beispiel nach z auf so erhält man:

$$z = \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^n - \left(\frac{y}{b}\right)^n} * C$$

$$z\ ist\ maximal\ wenn\ \left(\frac{x}{a}\right)^n, \left(\frac{y}{b}\right)^n = 0, so\ ist\ z = c$$

Man kann dasselbe für x und y berechnen und so erhält man noch x = a, y = b und auch für -x, -y und –z.

c) **Wie lautet der Normalenvektor des SEs an einem Punkt (x,y,z)? Wie verhält er sich für n → ∞ ? Was bedeutet dieses Ergebnis?**

- Gradient ist senkrecht auf Niveauflächen

- Gradient:

$$\frac{n \cdot x^{n-1}}{a^n}, \frac{n \cdot y^{n-1}}{b^n}, \frac{n \cdot z^{n-1}}{b^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n \cdot x^{n-1}}{a^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{a}\right) \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}$$

x < a → $\lim_{n\to\infty} = 0$

x > a → $\lim_{n\to\infty} = \infty$

→ V_{normal} $\begin{pmatrix} \pm\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\infty \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\infty \end{pmatrix}$

$y, z = 0 \quad x.z = 0 \quad x, y = 0$

d) **Betrachten wir den Spezialfall a = b = c = 1 und n = 20. In welchen Stellen auf der xz- bzw. yz-Ebene ist die Steigung des SEs in Richtung der x- bzw. y-Achse genau 45°?**

Gegeben ist die Formel: $x^{20} + y^{20} + z^{20} = 1$ Diese lässt den Superellipsoid aussehen wie einen Würfel mit abgerundeten Ecken.

Die Gleichung wird nach z aufgelöst, um zu untersuchen an welchen Stellen die Steigung genau 45° beträgt bzg. x- und y-Achse.

$$z = \sqrt[20]{1 - x^{20} - y^{20}}$$

Nun berechnen wir den Gradient von z:

$$Grad\ z = \begin{matrix} \dfrac{x^{19}}{\sqrt[20]{1 - x^{20} - y^{20}}^{19}} \\ \dfrac{y^{19}}{\sqrt[20]{1 - x^{20} - y^{20}}^{19}} \end{matrix}$$

Untersuchen wir nun die Steigung in der xz Ebene bezüglich der x Achse, muss y = 0 gelten. Und da der gesuchte Winkel 45° ist, gilt: $\frac{\Delta x}{\Delta z} = 1$. Zusammen mit der Voraussetzung, dass y = 0 ist erhält man aus dem Gradienten, dass:

$$\frac{x^{19}}{\sqrt[20]{1 - x^{20}}^{19}} = 1$$

gelten muss. Formt man dies nun nach x um, erhält man als mögliche x Werte, auf der x Achse ± 0.966. Für die y Achse würde das genau gleiche Verfahren durchgeführt werden. Somit erhält man die folgenden Werte:

P_1: (0.966,0) P_2: (-0.966,0) P_3: (0,0,966) P_4: (0, -0.966)

Diesen Satz von Werten gibt es einmal für z grösser Null und einmal für z kleiner Null. Diese sind dann gleichbedeutend mit den abgerundeten Ecken des Würfels.

Hier sieht man noch eine Superellipse (2D), die in den Ecken ebenfalls diese Krümmung aufweist.