4. Anschauliche Bedeutung der Divergenz

Sieht man ein Vektorfeld als Strömung an, dann ist die Divergenz ein Mass für die Änderung der Strömungsstärke (in Strömungsrichtung). Dazu stellt man sich ein kleines, durchlässiges Kästchen vor, das in die Strömung gelegt wird: fliesst mehr hinaus als hinein, ist die Strömung offenbar stärker geworden (die Divergenz ist im Kästchen positiv). Entsprechend, wenn weniger aus dem Kästchen hinaus- als hineinströmt, wird die Strömung abgeschwächt (die Divergenz ist im Kästchen negativ).

a) Schätze, ob die Divergenz der Vektorfelder in Abbildung 4 im jeweils markierten Punkt jeweils positiv, negativ oder Null ist (mit Begründung).

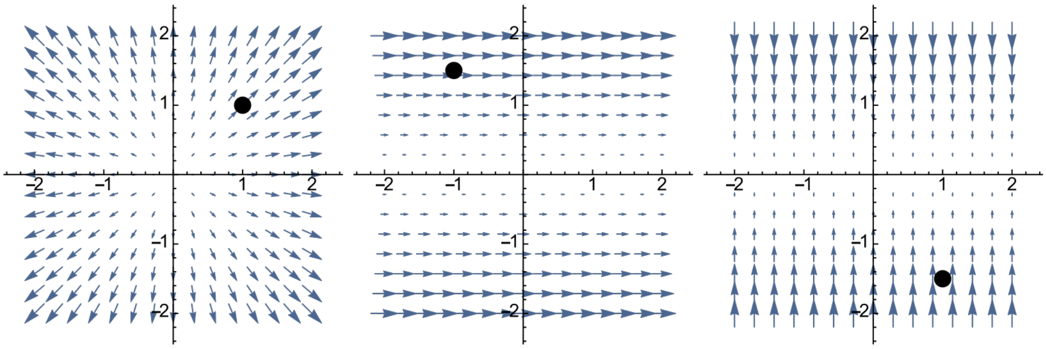

Abbildung 1: Drei einfache Vektorfelder.

Im linken Bild ist die Divergenz positiv, da die eintreffenden Pfeile beim Kästchen kleiner sind als die Austretenden.
Beim Bild in der Mitte ist die Divergenz Null. Die eintreffenden und austretenden Pfeile sind gleich gross.
Rechts ist eine negative Divergenz im Kästchen dargestellt. Grössere Pfeile treffen auf das Kästchen ein als aus dem Kästchen heraus.

Unter anderem bestimmt natürlich die Längen Änderung der Vektoren in der Umgebung¨ eines Punktes die dortige Änderung der Strömungsstärke. Der genaue Zusammenhang soll am Beispiel des Vektorfelds

$$V(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^k} \cdot (x,y)$$

untersucht werden (hierbei ist $k \geq 0$).

b) Skizziere V für verschiedene k.

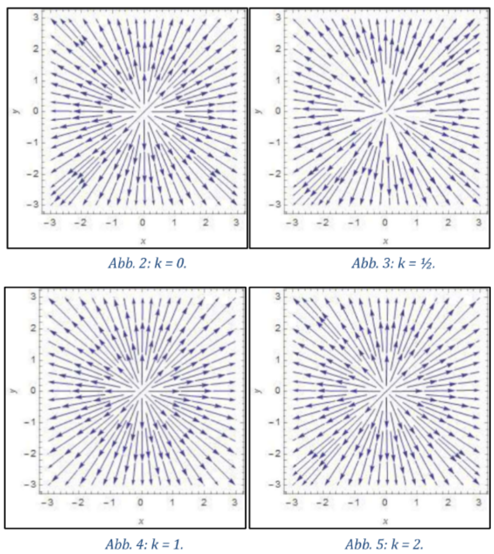

Abb. 2: k = 0. Abb. 3: k = ½.

Abb. 4: k = 1. Abb. 5: k = 2.

Abbildung 2: Teilaufgabe b)

c) Experimentiere und finde heraus, was eine Variation von k bewirkt. Gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen der Länge der Vektoren und der Divergenz von V?

Die Divergenz ist definiert als:

$$Div(V) = \frac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial x} + \frac{\partial \overrightarrow{v_2}}{\partial y} + \frac{\partial \overrightarrow{v_3}}{\partial z}$$

Da unser V(x,y) nur zweidimensional ist wird die z-Komponente nicht betrachtet.

$$\begin{aligned} Div(V) &= \frac{(x^2+y^2)^k - 2\cdot x^2 \cdot k \cdot (x^2+y^2)^{k-1}}{(x^2+y^2)^{2k}} + \frac{(x^2+y^2)^k - 2\cdot y^2 \cdot k \cdot (x^2+y^2)^{k-1}}{(x^2+y^2)^{2k}} \\ &= \frac{2\cdot (x^2+y^2)^k - 2\cdot k \cdot ((x^2+y^2)(x^2+y^2)^{k-1})}{(x^2+y^2)^{2k}} = \frac{2\cdot (x^2+y^2)^k}{(x^2+y^2)^{2k}} \cdot (1-k) \\ &= 2\cdot (x^2+y^2)^{-k} \cdot (1-k) \end{aligned}$$

Der Betrag des Vektors beträgt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(\frac{x}{(x^2+y^2)^k})^2 + (\frac{y}{(x^2+y^2)^k})^2} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-k}$$

Der Zusammenhang zwischen Divergenz und Länge ist somit:

$$Div(V) = |\vec{v}| \cdot \frac{2\cdot(1-k)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\sqrt{x^2+y^2}$ entspricht genau der Distanz zum Ursprung.

Tabelle 1: Längen und Divergenz für verschiedene k.

k	$\lvert\vec{v}\rvert$	**Divergenz**
0	$\sqrt{x^2+y^2}$	2
½	1	$1/\sqrt{x^2+y^2}$
1	$1/\sqrt{x^2+y^2}$	0
2	$1/\sqrt{x^2+y^2}^3$	$-2/\sqrt{x^2+y^2}^4$