

Anwendungsübung

Raphael Pellin, Peter Krack

27. April 2017

Versteckte Symmetrie

Aufgabenstellung

Gegeben ist die radiale Schrödingergleichung

$$\ddot{\varphi}_1(r) + (E - V_1(r)) \cdot \varphi_1(r) = 0 \quad (1)$$

mit der Potentialfunktion

$$V_1(r) = ar^2 + br^4 + cr^6.$$

φ ist die gesuchte Funktion und E die totale Energie. Es soll gezeigt werden, dass wenn $\varphi_1(r)$ die Gleichung löst ebenfalls $\varphi_2(r) = \varphi_1(ir)$ eine Lösung ist, sofern die Vorzeichen von b und E umgedreht werden.

Lösung

Um diesen Zusammenhang nachzuweisen, muss gezeigt werden, dass die Gleichung

$$\ddot{\varphi}_2(r) + (-E - V_2(r)) \cdot \varphi_2(r) = 0 \quad (2)$$

mit der Potentialfunktion

$$V_2(r) = ar^2 - br^4 + cr^6$$

erfüllt ist. Da die Funktion $\varphi_2(r) = \varphi_1(ir)$ ist, kann die Gleichung (2) mit

$$\ddot{\varphi}_2(r) = \frac{d}{dr^2} \varphi_1(ir) = -\ddot{\varphi}_1(ir) \quad (3)$$

als

$$-\ddot{\varphi}_1(ir) + (-E - V_2(r)) \cdot \varphi_1(ir) = 0 \quad (4)$$

geschrieben werden. Wird nun $u := ir$ gesetzt ergibt sich $r = -iu$ und Gleichung (4) wird somit zu

$$-\ddot{\varphi}_1(u) + (-E - \underbrace{(a(-iu)^2 - b(-iu)^4 - c(iu)^6)}_{=V_2(r)=V_2(-iu)}) \cdot \varphi_1(u) = 0 \quad (5)$$

$$-(\ddot{\varphi}_1(u) + (E - \underbrace{(au^2 + bu^4 + cu^6)}_{=V_1(u)}) \cdot \varphi_1(u)) = 0 \quad (6)$$

Dies entspricht der Gleichung (1). Da Gleichung (1) für alle r gilt, gilt sie auch für u . Demnach ist Gleichung (2) erfüllt.

Anwendung

In Aufgabe b) soll man nun über das folgende Beispiel gutachten:

$$\ddot{\varphi}(r) + \left[E - ar^{\frac{3}{2}} - \frac{b}{r^{\frac{3}{2}}} - \frac{c}{r^{\frac{4}{3}}} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} \right] \varphi(r) = 0 \quad (7)$$

Hier soll nun erneut die versteckte Symmetrie angewandt werden. Dies führt uns zu folgender Gleichung:

$$\ddot{\varphi}(ir) + \left[E - a(ir)^{\frac{3}{2}} - \frac{b}{(ir)^{\frac{3}{2}}} - \frac{c}{(ir)^{\frac{4}{3}}} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{(ir)^2} \right] \varphi(ir) = 0 \quad (8)$$

Man erkennt sofort, dass dabei komplexe Wurzeln entstehen. Erinnert man sich dabei an den Hauptsatz der Linearen Analysis, weiss man, dass es jeweils mehrere Lösungen geben wird. Für $\sqrt[3]{i}$ ergeben sich die Lösungen: $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ und $\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ und $-i$. Geht man nun von $-i$ aus, so stimmt es mit den Erwartungen überein. Für die \sqrt{i} nun jedoch ergibt sich: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ und $\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ als Lösung. Dies ist nun nicht mehr reell lösbar. Daraus lässt schliessen, dass die entsprechende Person ohne nachzurechnen die versteckte Symmetrie verwendet hat.