# Anwendungsübung Aufgabe 7

a) Wenn man eine Diffgleichung transformiert, macht man das gleiche mit der Lösung und erhält so neue exakte Lösungen.

b) Transformation von R(x) kann zu neuen Lösungen führen, mit

$$R''(x) + V(x)\,R(x) = 0$$

Für R(x) wird $R(x) = \mathrm{f}(\mathrm{r(x)})\mathrm{G}(\mathrm{r(x)})$ eingesetzt folglich ist die zweite Ableitung davon $R''(x)$

Hierbei muss die Produktregel und die Kettenregel beachtet werden

$$R'(x) = f'(r(x)) * r'(x) * G(r(x)) + f(r(x)) * r'(x) * G'(r(x))$$

$$R''(x) = f''(r(x)) * r'(x) * r'(x) * G(r(x)) + f'(r(x)) * r''(x) * G(r(x)) + 2 * f'(r(x)) * r'(x) * r'(x) * G'(r(x)) + f(r(x)) * r'(x) * r'(x) * G''(r(x)) + f(r(x)) * r''(x) * G'(r(x))$$

$G(x)$ und deren Ableitungen ausgeklammert.

$$R''(x) = G(r(x)) * \left(f''(r(x)) * r'(x) * r'(x) + f'(r(x)) * r''(x)\right) + G'(r(x)) * \left(2 * f'(r(x)) * r'^2(x) + f(r(x)) * r''(x)\right) + G''(r(x)) * (f(r(x)) * r'^2(x)$$

Aus der ausgehenden Gleichung $R''(x) + V(x)\,R(x) = 0$

Sieht man, dass R'(x) nicht vorkommt, jedoch auch nicht gleich null ist.(Sonst wäre R''(x)=0.

Daraus folg das der Koeffizient von G'(x), 0 sein muss.

$$2 * f'(r(x)) * r'^2(x) + f(r(x)) * r''(x) = 0$$

Nun wird die DGL gelöst:

$$\frac{2 * f'(r(x))}{f(r(x))} = -\frac{r''(x)}{r'^2(x)}$$

$$2\int \frac{f'(r(x))}{f(r(x))} df = -\int \frac{r''(x)}{r'^2(x)} dr$$

$$dr = \frac{dr}{dx} * dx = r'(x) * dx$$

$$2 * \ln|f(r(x))| + C_1 = -\int \frac{r''(x)}{r'(x)} dx$$

$$2 * \ln|f(r(x))| + C_2 = -\ln|r'(x)|$$

Nur wird nach $|r'(x)|$ aufgelöst

$$|f(r(x))|^2 * e^{C_2} = \frac{1}{|r'(x)|}$$

Substitution : $A = \frac{1}{e^{C_2}}$

$$|r'(x)| = \frac{A}{|f(r(x))|^2}$$

Nun ersetzen wir r'(x) in der oberen Gleichung und lösen nach r''(x) auf:

$$r''(x) = -\frac{2 * f'\big(r(x)\big) * A^2}{f\big(r(x)\big)^5}$$

Nun können wir die die Anfangsgleichung ersetzen:

$$R''(x) + V(x)R(x) = 0$$

$$= \quad G\big(r(x)\big) * \left(\frac{f''(r(x)) * A^2}{f(r(x))^4} + f' * \frac{2 * f'(r(x)) * A^2}{f(r(x))^5}\right) + G' * \left(\frac{2 * f'(r(x)) * A^2}{f(r(x))^4} + f * - \frac{2 * f'(r(x)) * A^2}{f(r(x))^5}\right) + G'' * \Big(\frac{f(r(x)) * A^2}{f(r(x))^4} + V(x) * f(r(x)) * G(r(x)) = 0$$

$$\frac{2 * f'\big(r(x)\big) * A^2}{f\big(r(x)\big)^4} + f * \frac{-2 * f\big(r(x)\big) * A^2}{f\big(r(x)\big)^5} = 0$$

So ergibt weiter durch wegfallen von G’(r(x))

$$G(r(x) * \left(\frac{f''\big(r(x)\big) * A^2}{f\big(r(x)\big)^4} - \frac{2 * f'^2\big(r(x)\big) * A^2}{f\big(r(x)\big)^5}\right) + G''\big(r(x)\big) * \left(\frac{A^2}{f\big(r(x)\big)^3}\right) + V(x) * (f(r(x) * G\big(r(x)\big) = 0$$

$$G''(r(x)) + G\big(r(x)\big) * \left(\frac{f''\big(r(x)\big)}{f\big(r(x)\big)} - \frac{2 * f'^2\big(r(x)\big)}{f\big(r(x)\big)^2} + \frac{V(x) * f\big(r(x)\big)^4}{A^2}\right) = 0$$

Und fertig ist die Transformation von der Schrödinger Gleichung