Delay Differentialgleichungen

Tristan Sachsenweger, Jorge Sanchez

1 Theorie

Retardierte Differentialgleichungen (DDE)

Retardierte Differentialgleichungen sind ein spezieller Typ Differentialgleichung, oft auch als DDE (Delayed Differential Equation) abgekürzt oder als Differentialgleichung mit nacheilendem Argument bezeichnet. Bei ihnen hängt die Ableitung einer unbekannten Funktion zum Zeitpunkt t nicht nur vom Funktionswert an diesem Zeitpunkt ab, sondern auch von Funktionswerten an früheren Zeitpunkten $t - \tau_i$ oder von Integralen über die Funktion über vergangene Zeitintervalle. DDEs spielen in Modellen eine Rolle, in denen die Wirkung erst verspätet (retardiert) auf die Ursache folgt. Bekannte Beispiele sind in der Epidemiologie (Infektion, Inkubationszeit), Populationsentwicklung in der Biologie (Fortpflanzung, Geschlechtsreife) und Regelungstechnik (Verzögerungszeit) zu finden. Eine DDE mit einer unbekannten Funktion $x(t)$ und einer punktweisen Verzögerung kann als $\dot{x} = f(t,\, x(t),\, x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_n})$ notiert werden. mit $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ und $x_{\tau_n} = x(t - \tau_n)$. Auch gibt es DDE, die eine kontinuierliche Verzögerung aufweisen, diese sind aber für diese Aufgabe nicht relevant. [1, 2, 3]

2 Aufgabe

Betrachten wir ganz allgemein zwei Grössen einer Tierpopulation N. Die Geburtenrate B ist die positive Steuergröße: Je größer die Geburtenrate ist, umso größer wird die Population. Die Sterberate D ist die .negative Steuergröße: Je größer die Sterberate ist, umso kleiner wird die Population [4]. Werden Geburten- und Sterberate gleichzeitig berücksichtigt, ergibt sich die zeitliche Veränderung der Population aus $\frac{dN}{dt} = B - D$. Dieses Modell ist zu einfach, um eine echte Population zu beschreiben. In der Natur hängen Geburten- und Sterberate von der eigentlichen Populationsdichte und von den Ressourcen des Ökosystems ab. Ausserdem sind sowohl Geburtenrate, wie auch Sterberate zeitabhängig, was doch die Sache um einiges komplizierter macht. Um die Entwicklung der Population mit der Zeit zu modellieren werden sogenannte verzögerte Einstellungsmodelle verwendet. Allgemein gilt:

$$\frac{dN(t)}{dt} = B(N(t-\tau)) - D(t) \tag{1}$$

Hierbei bezeichnet $N(t)$ die Anzahl Individuen einer Population, B ist die Geburtenrate, die eine Verzögerung τ beinhaltet und D ist die Sterberate, die von der Anzahl Individuen abhängt. Die Verzögerung τ trägt dazu bei, dass sich die adulten Tiere immer verzögert entwickeln, also es dauert immer eine Zeit bis sie geschlechtsreif sind. Ausserdem ist die Sterberate nur abhängig von der Anzahl Individuen, die zu einem bestimmten Zeitpunkt vorhanden sind, hier gibt es keine Verzögerung. Wir haben ein ähnliches Modell in der Aufgabe gegeben, wobei hier mehrere Variablen umbenannt wurden [5]:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t-\tau)) - \mu * y(t) \tag{2}$$

a) Was könnten die Konstanten μ und τ in (2) bedeuten?

Mathematisch ist τ eine zeitliche Verzögerung und µ ist ein Dämpfungsfaktor, der die Steigung der Kurve beeinflusst. Allerdings können wir durch Vergleich mit (1) erkennen, dass $\mu * y(t) = D(t)$ ist. Somit ist µ eine konstante Sterberate in der Biologie.

b) Man setzt oft τ = 1. Wieso ist das keine Einschränkung? Kann man jede Gleichung der Form (2) auf eine mit τ = 1 transformieren?

Wie bereits beschrieben, ist τ eine Konstante, die die Verzögerung charakterisiert. Grundsätzlich ist jede Verzögerung τ > 0 erlaubt. Wie wir bereits aus Analysis wissen, können wir eine Funktion (oder eine Schar von Funktionen) linear transformieren. Setzen wir im Argument -τ ein, so verschiebt sich die gesamte Funktion um τ Einheiten Richtung positive t-Achse. Da wir bei den Differentialgleichungen immer von einer Schar von Funktionen sprechen, wird es immer es eine Funktion geben, die man so verschieben kann, dass sie die Bedingung τ = 1 erfüllt. Wir beweisen das mathematisch:

Mit der Substitution $\tilde{t} = \frac{t}{\tau}$ und $d\tilde{t} = \frac{d\tilde{t}}{dt}dt$ erhält man aus $\frac{dy(t)}{dt}$ die Beziehung

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{d\tilde{t}} * \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{dy(\tilde{t} * \tau)}{d\tilde{t}} * \frac{d}{dt}\tilde{t} = \dot{y}(\tilde{t}) * \frac{d}{dt}\tilde{t} = \dot{y}(\tilde{t}) * \frac{1}{\tau}$$

Eingesetzt in die obere Delay Gleichung gibt das $\dot{y}(\tilde{t}) * \frac{1}{\tau} = f(y(\tilde{t}\tau - \tau)) - \mu * y(\tilde{t}\tau)$. Durch ausmultiplizieren ergibt sich

$$\dot{y}(\tilde{t}) * \frac{1}{\tau} = f(y(\tau(\tilde{t} - 1))) - \mu * y(\tilde{t}\tau)$$

. Rücksubstitution von $\tau = \frac{t}{\tilde{t}}$ ergibt $\dot{y}(t) = f(y(t - \tau)) - \mu * y(t)$. Wir erweitern mit τ und substituieren $\tau\mu = \tilde{\mu}$

$$\dot{y}(\tilde{t}) = \tau * f(y(\tau(\tilde{t} - 1))) - \frac{\tilde{\mu}}{\tau} * \tau * y(t) \Leftrightarrow \dot{y}(\tilde{t}) = \tau * f(y(t - \tau)) - \frac{\tilde{\mu}}{\tau} * \tau * y(t)$$

Somit kann man ohne Einschränkung τ = 1 setzen.

c) Wir wollen jetzt ein konkretes Anfangswertproblem für $t \in [0, 1]$ mit Gleichung (2) lösen. Dazu setzen wir τ = 1 und nehmen folgende Funktion $f(y) = \begin{cases} -1, & y < 0 \\ +1, & y \geq 0 \end{cases}$. Jetzt fehlt noch der Anfangswert y_0, wir nehmen $y_0(t) = t$ wobei $t \in [-1, 0]$. Wieso ist die Funktion y_0 ein Anfangswert für unsere Gleichung?

Die Delay Gleichung ist eine verzögerte Gleichung, also brauchen wir für die Berechnung eines Intervalls in der „Zukunft” Information über ein Intervall in der „Vergangenheit”. Die Aufteilung in Intervalle der länge τ ist nützlich für die Lösung der Differentialgleichung. In unserem Fall heisst es, dass die Information im Intervall [-1,0] gegeben sein muss, damit die Funktion $f(y(t - 1))$ „Sinn macht”. Was wir anschaulich machen ist mit τ = 1 den Bereich der Funktion von [-1,0] zu [0,1] zu verschieben. Mathematisch: Gleichung (2) ist gültig für folgende Voraussetzung: $y(s) = \varphi(s)$ für $s \in [-\tau, 0]$. Hierbei ist φ eine stetige nicht-negative Funktion : $\varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^+)$, $\varphi(0) > 0$. Unser y_0 erfüllt diese Voraussetzung [7].

d) Versuche, eine Lösung der Delay-Gleichung (2) mit Anfangswert zu bestimmen und skizziere sie im Intervall $[0, 1]$.

Die meisten DDE haben keine analytische Lösung, so dass man auf numerische Verfahren angewiesen ist. Allerdings sind sie bei bestimmten Bedingungen und gegebene Anfangswerte oft durch Separation lösbar. Es wird jeweils der zu integrierende Bereich in Intervalle aufgeteilt, und dann wird das entsprechende inhomogene Anfangswertproblem (mit einer Anfangsbedingung) für einen Bereich gelöst. Die Lösung ist wieder ein Anfangswert, welcher eine Anfangsbedingung für das nächste Intervall darstellt. Dieser Algorithmus wird mehrfach wiederholt. Die Delay-Gleichungen werden hier über verschiedene Intervalle „teilintegriert”, wobei sie dann über alle Zeitintervalle aufsummiert werden und sich so eine geschlossene Lösung finden lässt. In der Praxis ist dies etwas kompliziert. In unserem Fall vereinfacht sich die Sache so, dass wir nur über einen Teilintervall integrieren müssen.

Wir wissen, dass die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ gilt, denn die Funktion ist stetig und sie fängt an, wo die Anfangsbedingung aufhört (vergleiche Vorlesung Analysis vom 28.04.2017). Mit der gegebenen Funktion kann der Term $f\left(y\left(t-1\right)\right)$im Intervall [0,1] zu -1 vereinfacht werden. Wir setzen somit $f = -1$ und erhalten:

$$\dot{y}(t) = -1 - \mu * y(t) \tag{3}$$

Wir wissen bereits aus der Physik wie man so eine Gleichung löst: Die Gleichung ist separierbar und es gibt eine allgemeine und eine spezielle Lösung.

Die harmonische Lösung/homogene DGL:

$$\frac{dy(t)}{dt} * \frac{1}{y(t)} = -\mu$$

$$\int \frac{1}{y(t)} dy = -\int \mu \, dt$$

$$ln(y) = \hat{C} - \mu * t$$

$$y(t) = e^{\hat{C} - \mu \mathrm{t}} = C * e^{-\mu * t}$$

Die spezielle Lösung/Störfunktion ist konstant. Wir setzen die gegeben Bedingungen in (3) ein: $y(t) = K$ und $y(0) = 0$.

$$0 = -1 - \mu * K$$

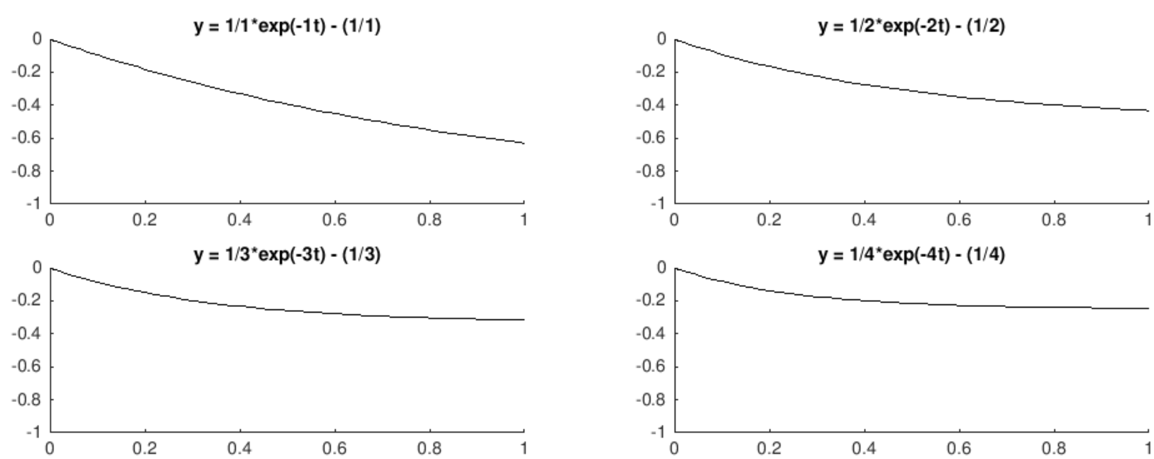
Somit ist

$$y(t) = K = \frac{-1}{\mu}$$

Nun kann auch die Konstante C mit y(0)=0 bestimmt werden, Somit lautet die allgemeine Lösung $y(t) = C * e^{-\mu * t} + K$:

$$y(t) = \frac{1}{\mu} e^{-\mu * t} - \frac{1}{\mu}$$

Die Lösung hängt somit von der Konstante μ ab. Je grösser μ, desto flacher wird unsere Funktion:



3 Eine Anwendung die mit Fliegen zu tun hat

Wie auch in der Aufgabenstellung beschrieben, können Delay Gleichungen dazu verwendt werden um Populationen in der Biologie zu modellieren. Berühmt ist das sogennante „Nicholson Blowflies equation" Modell. Ohne in nähere Details einzugehen soll nur angemerkt werden, dass hier die zeitliche Verzögerung der Veränderung einer Schmeissfliegenpopulation modelliert wird [6]:

$$\frac{dN(t)}{dt} = R(N(t-T_D)) - \delta N(t)$$

Dies stimmt mit dem Modell unserer Aufgabenstellung überein. In den Experimenten von Nicholson wurde die Schmeissfliegenpopulation durch die Rate der Nahrungsversorgung entweder der erwachsenen Population (Fig. 1a) oder der Larvenpopulation (Fig. 1b, c) gesteuert. Ein Delay zwischen den gelegten Eiern und die adulten Fliegen ist stets erkennbar.

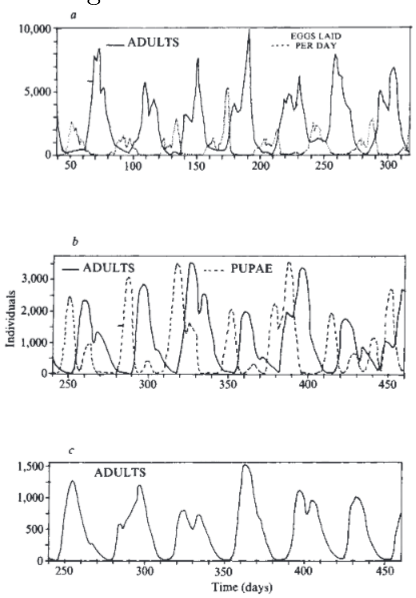


Fig. 1 Quasi-periodic fluctuations in laboratory populations of *Lucilia cuprina*. Population regulated by adult food supply (*a*), larval food supply (50 g per day) (*b*), larval food supply (25 g per day) (*c*). Data from ref. 1.

[6, 8]

Literatur

[1] Wikipedia Eintrag über Retardierte DGL
https://de.wikipedia.org/wiki/Retardierte_Differentialgleichung (01.05.2017)

[2] Buch über Retardierte DGL und ihre Anwendungen
http://link.springer.com/book/10.1007%2F1-4020-3647-7 (01.05.2017)

[3] Wissenschaftlicher Eintrag zu retardierte DGL
http://www.scholarpedia.org/article/Delay-differential_equations (01.05.2017)

[4] Wikipedia Eintrag über Populationsdynamik
https://de.wikipedia.org/wiki/Populationsdynamik (01.05.2017)

[5] Aufgabestellung der Anwendungsübung
http://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/analysis2_mavt_matl/anwendungen_fs.pdf (01.05.2017)

[6] Nicholson's blowflies revisited, W. S. C. Gurney, S. P. Blythe & R. M. Nisbet
http://www.nature.com/nature/journal/v287/n5777/abs/287017a0.html (01.05.2017)

[7] Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems, L. Berezanskya, E. Bravermanb, L. Idelsc
http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X09002674 (01.05.2017)

[8] Originalartikel von A. J. Nicholson, An outline of the dynamics of animal populations
http://www.publish.csiro.au/zo/ZO9540009 (01.05.2017)