Interpretation der Dichtefunktion

In dieser Teilaufgabe wurde nach einer Interpretation der Abbildung 1 gefragt.

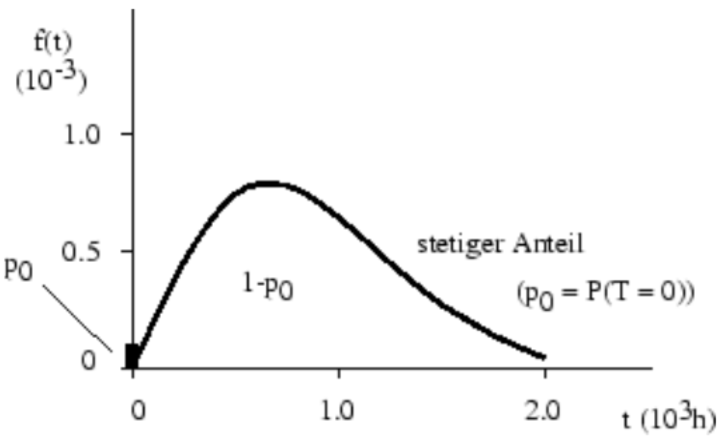

Abbildung 1: Die in der Aufgabe gegebene Dichtefunktion.

Die Fläche unter der Kurve entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Glühbirne in einem gewählten Zeitintervall kaputt geht. Durch eine Integration der Dichtefunktion über einem Zeitintervall kann diese berechnet werden. Wird nun über der gesamten Zeit von 0 bis ∞ integriert, sollte diese Wahrscheinlichkeit 1 betragen.
Da aber bereits bei der Inbetriebnahme der Glühbirne ein Defekt auftreten kann, ist für $t = 0$ die Wahrscheinlichkeit nicht 0, sondern p_0. Dies wird durch den Balken beim Ursprung dargestellt. Folglich ist die Fläche unter der Kurve nicht 1, wie zu erwarten wäre, sondern $1 - p_0$.

Herleitung einer Dichtefunktion

Gesucht war die Dichtefunktion $f(t)$ zur Verteilfunktion (1):

$$F(t) = \frac{\Gamma(\alpha, \frac{t}{\beta})}{\Gamma(\alpha)} \tag{1}$$

Dafür muss also $F(t)$ nach t abgeleitet werden. Da die vollständige Gammafunktion $\Gamma(\alpha)$ nicht von t abhängig ist, kann sie als Konstante betrachtet werden. Die Ableitung der unvollständigen Gammafunktion kann mit dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung bestimmt werden:

$$f(t) = F'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{\frac{t}{\beta}} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta} \cdot \left(\frac{t}{\beta} \right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{t}{\beta}} \tag{2}$$

Um die Funktion zu plotten wird der Limes in der vollständigen Gammafunktion für t eingesetzt und es entsteht somit ein Integral von 0 bis ∞. In der Abbildung 2 sind die Darstellungen für einige Werte von α und β gezeigt:

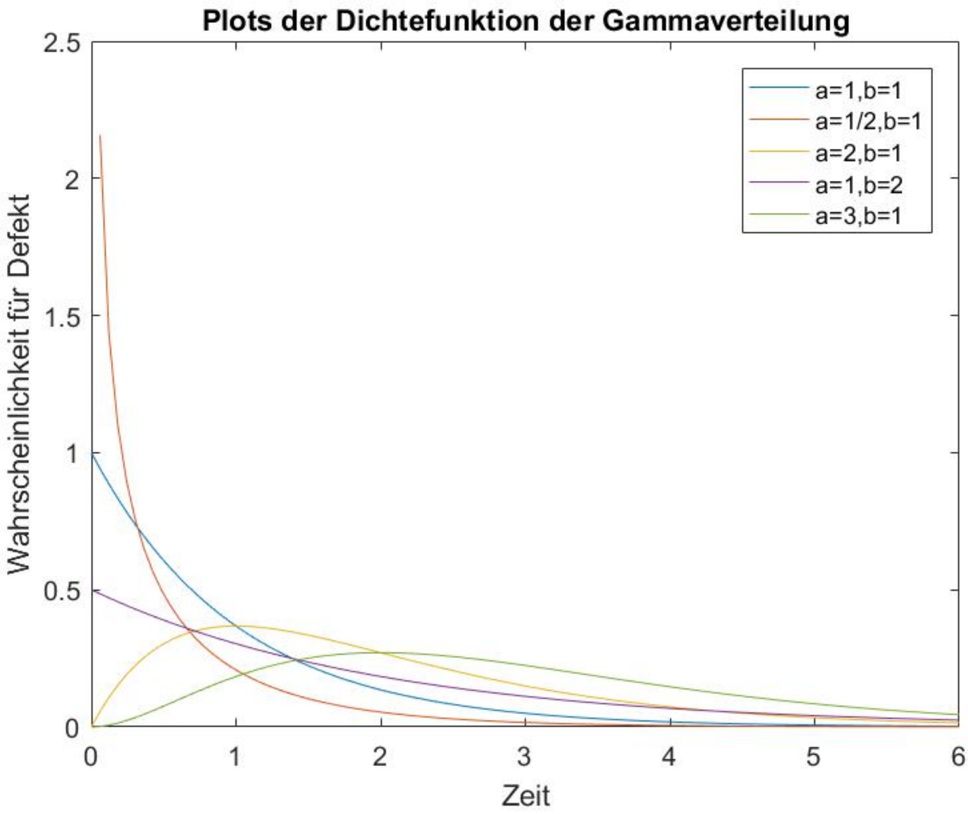

Abbildung 2: Die Dichtefunktion aus der zweiten Teilaufgabe für verschiedene α und β.

Wird α nun gleich 1 gesetzt, so werden alle Terme $x^{\alpha-1}$ der Dichtefunktion gleich 1, was die Rechnung entsprechend vereinfacht. Auch die vollständige Gammafunktion wird 1:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 \tag{3}$$

Schliesslich resultiert für $f(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$, da auch $e^{-\frac{t}{\beta}} = 1$ wird:

$$f(0) = \frac{1}{\beta} \tag{4}$$

Dies ist für die richtigen β ein brauchbarer Wert. Aus den geplotteten Kurven kann man zudem sehen, dass $f(t)$ nur eine sinnvolle Dichtefunktion ergibt, wenn $\alpha \geq 1$ ist.

Verallgemeinerung

Wird in der Gammaverteilung oben das $\frac{t}{\beta}$ durch ein allgemeines $g(t)$ ersetzt, so resultiert für die Dichtefunktion, nach den selbigen Schritten wie oben:

$$f(t) = F'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^{g(t)} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot g(t)^{\alpha-1} \cdot e^{-g(t)} \cdot g'(t) \tag{5}$$

Wird nach dem selben Verfahren wie oben eingesetzt, so resultiert für $\alpha = 1$ beim Punkt $t = 0$:

$$f(0) = g'(0) \cdot e^{-g(0)} \tag{6}$$

Dass dies korrekt ist, kann überprüft werden, indem für $g(t)$ $\frac{t}{\beta}$ eingesetzt wird.