5. Elektrischer Fluss

Der Fluss eines Vektorfeldes ist wie folgt definiert:

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} do = \pm \int_a^b \int_c^d \vec{v}(\Phi(u,v)) \cdot \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|} |\Phi_u \times \Phi_v| du dv$$
$$= \pm \int_a^b \int_c^d \vec{v}(\Phi(u,v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) du dv.$$

Abbildung 1: Definition Fluss [1]

Das Elektrische Feld in kartesischen bzw. Kugelkoordinaten sieht wie folgt aus.

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{q}{|(x,y,z)|^3} \cdot (x,y,z) = \frac{q}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r}$$

a) Das Vektorfeld zwischen einer positiven und einer negativen Ladung soll skizziert werden.

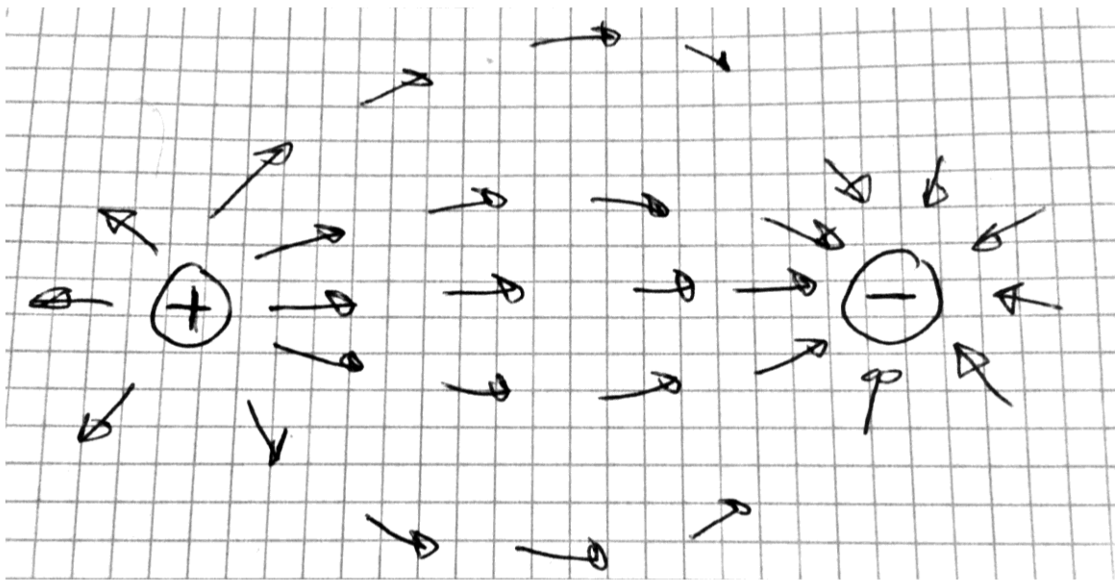

Abbildung 2: Skizze des E-Feldes zwischen einer positiven und einer negativen Ladung.

b) Es soll der Fluss durch verschiedene Körper berechnet werden, wobei die Quelle im Körper ist. Deshalb kann der Satz von Gauss nicht angewendet werden. Als erstes Beispiel nehmen wir die Kugel. Zuerst wird ein auf die Kugel senkrecht stehender Vektor berechnet und anschliessend normiert. Somit erhalten wir den Normalen Vektor auf die Kugel.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad |\vec{r}| = R \qquad \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = R^2 \begin{pmatrix} \sin(\theta)^2 \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta)^2 \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \qquad |\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = R^2 \sin(\theta)$$

Nun kann der Fluss berechnet werden.

$$\vec{E}\cdot\vec{n} = \frac{q}{R^3}\cdot R\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\cdot\sin(\theta)\\ \sin(\theta)\cdot\sin(\varphi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi)\\ \sin(\theta)\cdot\sin(\varphi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix} = \frac{q}{R^2}$$

$$\phi = \iint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{q}{R^2}\cdot R^2\sin(\theta)\;d\theta\,d\varphi = 4\pi q$$

Daraus folgt, dass der Fluss durch eine beliebige Kugel unabhängig vom Radius der Kugel ist.

Als zweites schauen wir uns einen Zylinder mit unendlicher Höhe an. Zuerst Berechnen wir wieder den Normalen Vektor und den Radius, sowie seine Länge.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix}R\cos(\varphi)\\ R\sin(\varphi)\\ z\end{pmatrix}\quad |\vec{r}| = \sqrt{R^2+z^2}\quad \vec{r}_\varphi = R\begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\ \cos(\varphi)\\ 0\end{pmatrix}\quad \vec{r}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad \vec{r}_\varphi\times\vec{r}_z = \begin{pmatrix}R\cos(\varphi)\\ R\sin(\varphi)\\ 0\end{pmatrix}$$

Nun kann der Fluss berechnet werden.

$$\phi = \iint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q}{(R^2+z^2)^{3/2}}\cdot\begin{pmatrix}R\cos(\varphi)\\ R\sin(\varphi)\\ z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\\ 0\end{pmatrix}\cdot R\,dz\,d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q}{(R^2+z^2)^{3/2}}\cdot R^2\,dz\,d\varphi = \quad 2\pi q\left(\lim_{h\to\infty}\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} - \lim_{h\to-\infty}\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$$

$$= \; 2\pi q\big(1-(-1)\big) = 4\pi q$$

Der Fluss ist unabhängig von der Oberfläche des Körpers.

c) Der Fluss durch eine geschlossene Oberfläche, wobei das Innere des Körpers Quellenfrei ist, kann mit dem Satz von Gauss berechnet werden.

$$\phi = \int\int_V\int div\;\vec{v}\;\mathrm{dV} = \int\int_V\int div\;\vec{E}\;\mathrm{dV}$$

Da die Divergenz im inneren gleich Null ist (Beweis: Siehe Vorlesung Analysis), folgt, dass der Fluss durch die Oberfläche gleich Null ist.

d) Der Fluss durch die Oberflächen von V und W muss der Gleiche sein. Denn es kommt nur auf die im Volumen eingeschlossene Ladung an und diese ist in beiden Fällen die Gleiche.

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint\limits_{W\setminus V} div\, \vec{E} = 0 = \iint\limits_{S} \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \iint\limits_{W} \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS - \iint\limits_{V} \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS$$

$$\iint\limits_{W} \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \iint\limits_{V} \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS$$

Quellenverzeichnis

Analysis II Thomas C.T. Michaels 2013 (S.315)