Meret, Yara & Ronja

2. Aufgabe: Zuverlässigkeitsrechnung

Die Zuverlässigkeitsrechnung macht es möglich, statistische Aussagen über die Lebensdauer/Funktionsdauer von Gebrauchsgegenständen zu machen. Dazu wird aus gemessenen Daten über die Funktionsdauer eines Geräts eine Dichtefunktion f hergeleitet mit der Variable t (=Zeit). Mit dem Integral $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$ lässt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Gegenstand im Zeitintervall $[t_1\ ,\ t_2]$ kaputt geht, berechnen.

a.) Interpretiere Abbildung 1. Erkläre insbesondere was an der Stelle t = 0 passiert, und warum $1 - p_0$ unter dem Graphen der Dichtefunktion steht.

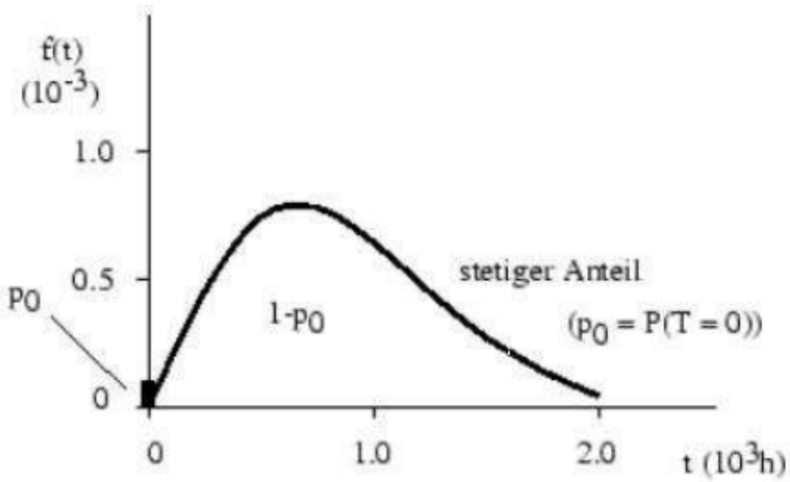

Abbildung 1: Dichtefunktion für die Lebensdauer von Glühbirnen

Auf der y-Achse wird die Wahrscheinlichkeit einer defekten Glühbirne angegeben (pro Zeiteinheit). Die meisten Glühbirnen haben eine Lebensdauer von 500-1000 Stunden. Für längere Brenndauern nimmt die Anzahl der noch funktionierenden Glühbirnen kontinuierlich ab. Nur sehr wenige Glühbirnen halten länger als 2000 Stunden und diese Zeiten wurden darum in der Abbildung vernachlässigt.

Bei t = 0 sind ein paar Glühbirnen schon kaputt, der Grund hierfür können z.B. Produktionsfehler sein. Die gesamte Fläche unter dem Graph muss gleich 1 (100%) sein, da es sich um die Wahrscheinlichkeit handelt, dass eine Glühbirne irgendwann kaputtgeht. Die von Anfang an kaputten Glühbirnen (p_0) werden von der Gesamtfläche abgezogen ($1-p_0$).

b.) gegeben: $F(t) = \frac{\Gamma\left(\alpha,\frac{t}{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha)}$, mit der unvollständigen Gammafunktion:

$\Gamma\left(\alpha,\frac{t}{\beta}\right) = \int_0^t y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} \cdot dy$ und der vollständigen Gammafunktion:

$\Gamma(\alpha) = lim_{t\to\infty} \int_0^t y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} \cdot dy$.

α, β sind positive Zahlen. Gesucht ist die Dichtefunktion f(t)=F\`(t). Zudem sollen für einige Werte von α, β Graphen erstellt werden. Besonders der Startwert für $\alpha = 1$.

Meret, Yara & Ronja

Wir betrachten zuerst die Funktion im Nenner:

$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} \cdot dy$

Die Funktion im Zähler abgeleitet:

$$\frac{d}{dt}\Gamma\left(\alpha, \frac{t}{\beta}\right) = \frac{d}{dt}\int_0^{\frac{t}{\beta}} y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} \cdot dy = \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} \cdot e^{\left(-\frac{t}{\beta}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right)$$

$$f(t) = \frac{\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} \cdot e^{\left(-\frac{t}{\beta}\right)}}{\beta \cdot \Gamma(\alpha)}$$

Plotten wir die Funktion $\Gamma(\alpha)$, sehen wir, dass Wir für α drei Fälle unterscheiden können.

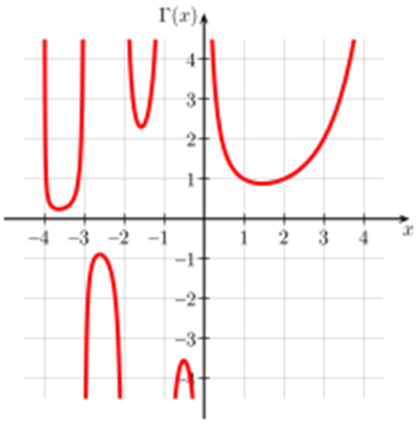

Abbildung 2: Funktion $\Gamma(\alpha)$

α =1: $\Gamma(1) = 1$, somit ist $f(0) = \frac{1}{\beta}$

α >1: $\Gamma(\alpha)$ wird sehr gross, also strebt $f(t \rightarrow \infty)$ gegen 0

$1 > \alpha > 0$: $f(t \rightarrow 0)$ strebt gegen unendlich, ist also keine sinnvolle Dichtefunktion mehr

Meret, Yara & Ronja

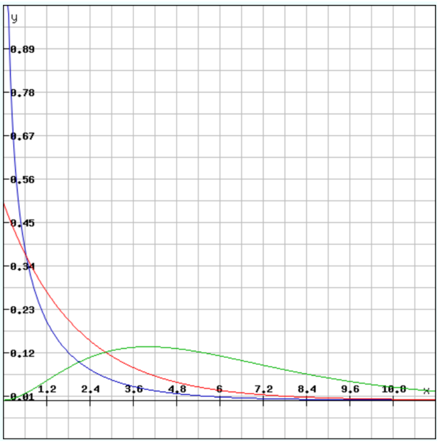

Abbildung 3: blau: $\alpha = 0.5$, *rot:* $\alpha = 1$, *grün:* $\alpha = 3$, β *ist immer* 2

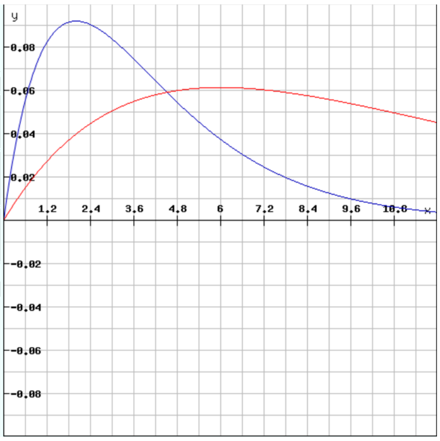

Abbildung 4: Einfluss von β *(blau=2, rot=6)* α *immer* 2

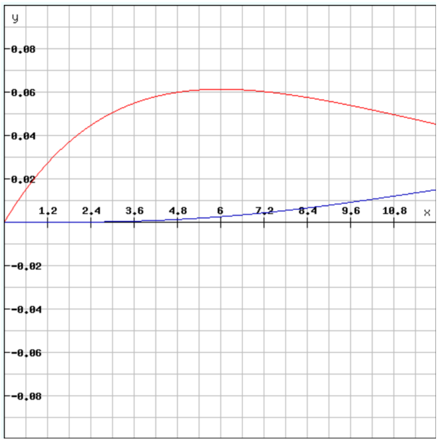

Abbildung 5: Einfluss von α *(blau=6, rot=2)* β *immer* 6

c) Wie würde die Dichtefunktion von (2) lauten, wenn wir die unvollständige Gammafunktion im Zähler durch die Verallgemeinerung $\Gamma(\alpha, g(t))$ ersetzen, wobei g eine stetig differenzierbare Funktion ist? Was ist nun f(0) im Falle von $\alpha = 1$?

Einsetzen in die Verteilungsfunktion:

$$\mathrm{F(t)} = \frac{\Gamma(\alpha, g(t))}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\int_0^{g(t)} y^{\alpha-1} e^{-y} dy}{\Gamma(\alpha)}$$

Ableiten für die Dichtefunktion:

$$F'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} * g(t)^{\alpha-1} * e^{-g(t)} * g'(t)$$

Nun zur Berechnung von f(0) mit $\alpha = 1$:

$$f(0) = 1 * 1 * e^{-g(0)} * g'(0) = e^{-g(0)} * g'(0)$$