Superellipsoide

Superellipsen sind ein Mittelding aus Ellipse und Rechteck. Superellipsoide, sind dann ähnlich nur mit einer weiteren Dimension. Die Funktion eines Superellipsoiden hängt von 3 Variablen ab und wird wie gefolgt beschrieben:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1 \tag{1}$$

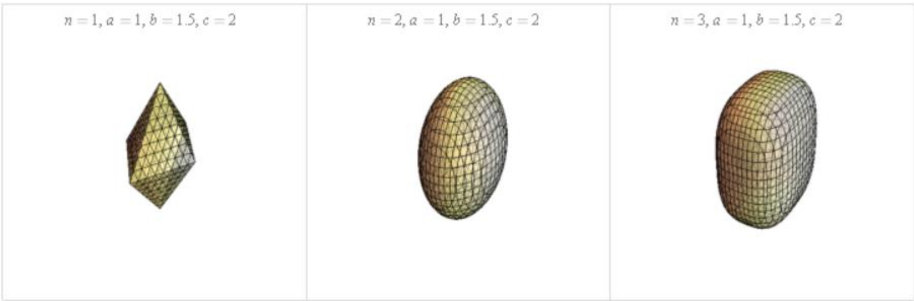
Im Vergleich zu einem normalen Ellipsoiden, welcher durch die Formel

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

gegeben ist.

Der Fall n = 2 führt auf eine normale Ellipsoide; größeres n (> 2) liefert die eigentliche Superellipse, die sich zunehmend einem Rechteck annähert; n unterhalb von 2 führt auf Subellipsen, die Ecken in Richtung der x- und y-Achsen aufweisen und sich für n gegen 0 dem Achsenkreuz annähern.

Der Gradient der Funktion $grad\ f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \nabla f(x,y,z)$ ist gegeben durch die partiellen Ableitungen.



(plotted for x from −2 to 2, y from −2 to 2, and z from −2 to 2)

Niveauflächen sind Superellipsen. Der Graph des Superellipsoids ist 4-Dimensional, weil die Funktion von 3 Variablen abhängt.

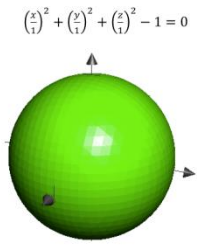
A) Wie ist das SE im Raum positioniert, d.h. wie liegen die Achsen und wo ist der Ursprung/Mittelpunkt?

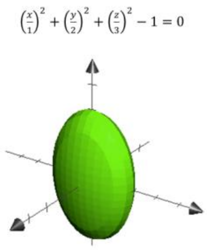
Mittelpunkt in $(0 \quad 0 \quad 0)$ und Halbachsen entlang den kartesischen Achsen x,y,z.

- ➔ Definitionsbereich ist in $\mathbb{R}^3$ aber Wertebereich ist dann $\mathbb{R}^4$

B) Wie groß ist die Ausdehnung des SEs, d.h. wo sind die Punkte mit der jeweils kleinsten bzw. größten x-, y-, z- Koordinate?

Wie bei einer normalen Ellipse oder Ellipsoide, ist die größtmögliche Ausdehnung entlang den Halbachsen (a,b,c) selbst.





Wir lösen die Gleichung (1) nach z auf der folgenden Gleichung:

$$z = c \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^n - \left(\frac{y}{b}\right)^n}$$

Wenn x=y=0, dann ist z=±c. Das wäre die maximale Ausdehnung des Körpers entlang der z-Achse. Analog gilt das auch für x und y.

C) Wie lautet der Normalvektor des SEs an einem Punkt (x,y,z)? Wie verhält er sich für n → ∞? Was bedeutet dieses Ergebnis?

Gradient ist ein möglicher Normalvektor, weil „Der Gradient steht dabei senkrecht auf der Niveaufläche (Niveaumenge) des Skalarfeldes in einem Punkt P,…, der Gradient von f an der Stelle
(x, y) [ist] ein Vektor in der xy-Ebene, der in die Richtung des steilsten Anstiegs von h an dieser Stelle zeigt.“

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{n\cdot x^{n-1}}{a^n} & \frac{n\cdot y^{n-1}}{b^n} & \frac{n\cdot z^{n-1}}{c^n} \end{pmatrix}^T$$

Für den Grenzwert wird hier nur z einmal betrachtet, denn es gilt analog für y und z auch:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot z(x,y)^{n-1}}{c^n} = \frac{n}{c}\cdot\left(\frac{z(x,y)}{c}\right)^{n-1}$$

Es strebt $\left(\frac{z}{c}\right)^{n-1}$ bei z ≤ c grundsätzlich zu 0, außer bei x=a. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{c}\cdot\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^n-\left(\frac{y}{a}\right)^n\right)^{1-\frac{1}{n}} = \frac{n}{c}$$

Es gilt:

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{v}_{\text{normal}}} \begin{pmatrix} \pm\frac{n}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{n\to\infty}{\mathrm{v}_{\text{normal}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{n}{b} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{n\to\infty}{\mathrm{v}_{\text{normal}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\frac{n}{c} \end{pmatrix}$$

Normalvektor der Ebene x = ±a	Normalvektor der Ebene y = ±b	Normalvektor der Ebene z = ±c

Der Körper ist ein Quader mit Seitenlängen 2a, 2b, 2c

D) Betrachten wir den Spezialfall a=b=c und n=20. In welchen Stellen auf der xy- Ebene ist die Steigung des SEs in Richtung der x- bzw. y-Achse genau 45°? (Fertige eine Skizze an)

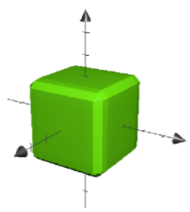
Das a=b=c gilt ist der Körper symmetrisch und kann wie gefolgt beschrieben werden:

$$x^{20}+y^{20}+z^{20}=1$$

Die Höhe z bleibt fixiert, weil nur die x und y Ebene betrachtet wird. Es kann z als Funktion von x,y geschrieben werden: $z(x,y) = \sqrt[20]{1-x^{20}-y^{20}}$

$$\boldsymbol{grad}\, z(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x^{19}}{\left(\sqrt[20]{1-x^{20}-y^{20}}\right)^{19}} \\ \dfrac{y^{19}}{\left(\sqrt[20]{1-x^{20}-y^{20}}\right)^{19}} \end{pmatrix}$$

Um eine Steigung von 45° in der xz-Ebene und yz-Ebene zu erhalten muss $\frac{\Delta x}{\Delta z} = \pm 1$ und $\frac{\Delta y}{\Delta z} = \pm 1$ gelten.



Betrachten wir den Querschnitt des SE in xz-Ebene, das heisst wir rechnen den Gradient von z an der Stelle y=0 aus:

$$grad\ z(x,0) = \begin{pmatrix} \frac{x^{19}}{(\sqrt[20]{1-x^{20}})^{19}} \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

dann lösen wir nach x : $\frac{x^{19}}{\left(\sqrt[20]{1-x^{20}}\right)^{19}} = 1 \Leftrightarrow x^{19} = \left(\sqrt[20]{1-x^{20}}\right)^{19} \Leftrightarrow x = \sqrt[20]{1-x^{20}}$

=>$x^{20} = 1 - x^{20} \Leftrightarrow 1 = 2x^{20}$

Also x ist genau $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}} = 0.966$. Analog gilt für y.

Wegen der Symmetrie dieses Körpers gibt es 4 Punkte auf der xz-Ebene bzw. yz-Ebene die diese Bedingung erfüllt, also insgesamt 8 Punkte:

P_1= (0.966 , 0), P_2= (-0.966 , 0), P_3= (0 , 0.966), P_4= (0, -0.966) für z >0 bzw. z < 0.