4. Aufgabe (Elektrischer Fluss)

Ein elektrisch geladenes Objekt (z.B. Elektron, Kondensator oder Spule) erzeugt ein elektrisches Feld.

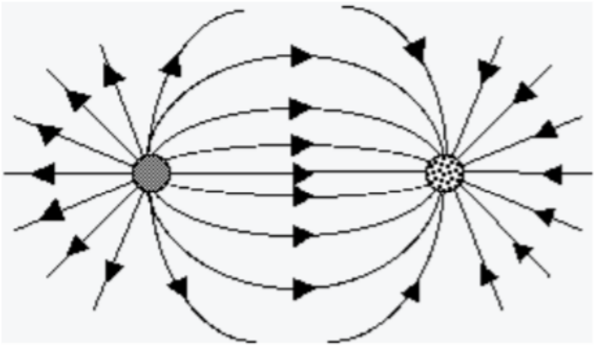

Abbildung 1 elektrisches Feld zwischen zwei einem im Betrag gleich starken positiven und negativem Teilchen

In Abb. 1 ist ein elektrisches Feld zwischen gleich starken positiven und negativen Ladungen dargestellt. Die Konvention ist, dass die Pfeile immer von der positiven zur negativen Ladung zweigen.

a) Skizziere das E-Feld von Abb. 1

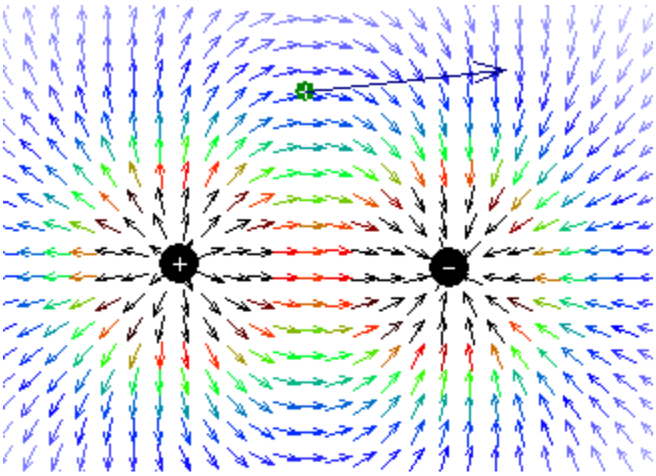

Abbildung 2 Das Vektorfeld zu der Abbildung 2

Abb. 2 zeigt die Vektoren eines solchen E-Feldes. Folgt man den Feldlinien aus Abb. 2 erhält man Abb. 1.

Der elektrische Fluss ist ein Mass für die Stärke des E-Feldes. Mathematisch ist es das Integral des E-Feldes über eine geschlossene Fläche. Das E-Feld wird mathematisch durch das Vektorfeld in Gleichung (1) beschrieben

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{q}{|(x,y,z)|^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

b) Berechne den elektrischen Fluss für verschiedene Oberflächen von Körpern. Die Ladung soll im Innern des Körpers liegen. Kann man den Satz von Gauss benutzen?

Im Folgenden soll das Beispiel an einer Sphäre durchgerechnet sein. Hierzu werden Kugelkoordinaten verwendet (2). Durch einsetzten erhält man die Beziehung (3). Der Normalenvektor in (4) ist für Kugelkoordinaten kollinear zum Ortsvektor.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cdot \sin\theta \cos\varphi \\ \rho \cdot \sin\theta \sin\varphi \\ \rho \cdot \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\vec{E}(\rho, \theta, \varphi) = \frac{q}{\rho^3} \begin{pmatrix} \rho \cdot \sin\theta \cos\varphi \\ \rho \cdot \sin\theta \sin\varphi \\ \rho \cdot \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\vec{E} \cdot \vec{N}\right) dA \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q}{\rho^2} \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \rho^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \\ &= \boldsymbol{4\pi q} \end{aligned} \tag{5}$$

Mit $\vec{N}$ dem Normalenvektor. Auffällig ist, dass der Fluss unabhängig von dem Radius ist.
Nun soll der Zylinder untersucht werden. Dazu werden Zylinderkoordinaten verwendet (6).

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z) = \frac{q}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos\varphi \\ \rho \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \; oder \; \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$2\pi \cdot q \cdot \rho^2 \cdot \int_{-H}^{H} (\rho^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} dz = 4\pi \cdot q \cdot \left(\frac{H}{\sqrt{H^2 + \rho^2}} \right) \tag{8}$$

$$4\pi \cdot q \cdot H \cdot \int_0^{r} \frac{\rho}{\rho^2 + H^2} d\rho = 4\pi \cdot q \cdot \left(1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + \rho^2}} \right) \tag{9}$$

Wobei H die halbe Höhe des Zylinders ist. Der Normalenvektor ist in (7) unterscheidet sich für die Mantelfläche und die Deckflächen. Es wird in (8) über die Mantelfläche und in (9) über die Deckelflächen integriert. Es fällt auf, dass das Resultat immer dasselbe ist. Dies ist anschaulich dadurch zu erklären, dass die Quelle in allen Fällen umschlossen ist und darum der gesamte Fluss durch die Fläche gehen muss. Unabhängig von der Form, Grösse oder Ausrichtung des Körpers.
Der Satz von Gauss versagt, da dieser nur angewandt werden darf, falls die Divergenz und somit auch das Vektorfeld überall definiert ist. Da das E-Feld aber im Ursprung, also in der einzigen Quelle, nicht definiert ist, führt dies nicht zum erwünschten Resultat.

c) gleiche Aufgabe wie b) aber jetzt befindet sich die Ladung ausserhalb des Körpers. Zur Herleitung wird ein infinitesimal dünner Quader verwendet (Abb. 3). Gemäss den Resultaten aus b) kann dann das Resultat auf einen allgemeinen Körper übertragen werden.

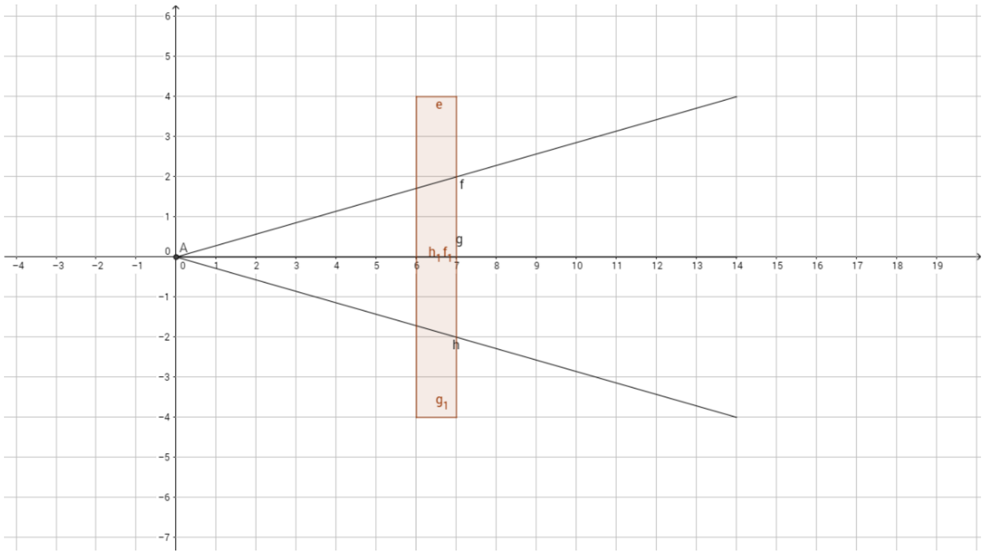

Abbildung 3 Ein infinitesimal kleiner Quader in dem E-Feld, welches durch die Feldlinien angedeutet wird.

Wir suchen zu jedem Flächenstück dA ein zweites Flächenstück mit dem antiparallelen Normalenvektor. So lässt sich das Integral über die gesamte Oberfläche durch zwei Teilintegrale schreiben (12).

$$\int_A \left(\vec{N} \cdot \vec{E}\right) dA = \int_{A_{\frac{1}{2}}} \left(\vec{N}_1 \cdot \vec{E}\right) dA + \int_{A_{\frac{1}{2}}} \left(\vec{N}_2 \cdot \vec{E}\right) dA \tag{10}$$

$$\overrightarrow{N_1} = -\overrightarrow{N_2}\ und\ A_{\frac{1}{2}} + A_{\frac{1}{2}} = A \tag{11}$$

$$\int_A \left(\vec{N} \cdot \vec{E}\right) dA = \int_{A_{\frac{1}{2}}} \left(\overrightarrow{N_1} \cdot \vec{E}\right) dA - \int_{A_{\frac{1}{2}}} \left(\overrightarrow{N_1} \cdot \vec{E}\right) dA = 0 \tag{12}$$

Die Überlegung ist vom Körper unabhängig und kann auf alle Körper übertragen werden. Anschaulich gesprochen: liegt die Quelle ausserhalb des Körpers und im Körper keine Senke, muss alles was in den Körper fliesst auch wieder aus dem Körper raus. Der Nettofluss ist darum gleich Null.

d) Es soll der Fall betrachtet werden, bei dem mehrere Punktladungen existieren. Jede Punktladung erzeugt ein E-Feld der Form

$$\vec{E}_i\,(x,y,z) = \frac{q}{|(x - x_i, y - y_i, z - z_i)|^3} \cdot \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \\ z - z_i \end{pmatrix} \tag{13}$$

Weiter ist die Situation gemäss Abb. 4 gegeben.

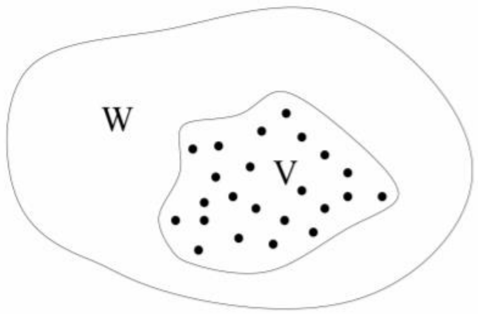

Abbildung 4 Die Punktladungen befinden sich alle in V und sind durch die Punkte angedeutet

Ausserhalb von V befindet sich keine Ladung. In Welchem Verhältnis steht der elektrische Fluss durch V und W zueinander?

Intuitiv geht aus er Teilaufgabe a) und b) hervor, dass der Fluss durch V und W derselbe sein muss, da sowohl V und W alle Quellen umschliessen. Mathematisch kann folgende Überlegung angestellt werden.

$$\phi_{tot} = \int_A (\vec{E} \cdot \vec{N})\, dA = \int_A \sum_i (\vec{E}_i \cdot \vec{N})\, dA = \sum_i \int_A (\vec{E}_i \cdot \vec{N})\, dA \\ = \sum_i 4\pi q_i = 4\pi Q \tag{14}$$

Wobei Q die Gesamtladung ist. Der Fluss hängt folglich nur von der eingeschlossenen Ladung ab und die ist sowohl in V wie auch in W dieselbe.

Quelle

Abb. 1 Aufgabenblatt (03.04.17)
Abb. 2 http://schulen.eduhi.at/riedgym/physik/11/elektr_feld/feld.htm (03.04.17)
Abb. 3 Mittels Geogebra online App (05.04.17)
Abb. 4 Aufgabenblatt (03.04.17)