Serie 1

1) Lineare Gleichungssysteme

Gegeben sei das System

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}\right|$$

(a) Bestimme per Hand eine Lösung des Systems mit dem Gaussalgorithmus.

(b) Prüfe Deine Lösung mit Mathematica (bitte Ausdruck mit abgeben).

Hinweis zu (a): Stelle zu dem System die augmentierte Matrix (A, b) auf, bringe sie durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform, und lese eine Lösung ab.

Hinweis zu (b): Die obige Matrix und die rechte Seite definiert man in Mathematica durch
`A = {{1,-1,1,1},{0,1,1,1},{0,0,1,1},{1,1,-1,1}}` und `b = {1,0,-2,1}`.

Verwende den Befehl `LinearSolve[A,b]`, lies Dir den Mathematica-Hilfetext zu diesem Befehl durch.

2) Polynome bestimmen

Es sei $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Bestimme die Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass Folgendes gilt:

$$p(0) = 2 \ , \ p(1) = 4 \ , \ p'(1) = 2 \ , \ p''(1) = 2 \, .$$

Dabei ist p' die Ableitung, und p'' die zweifache Ableitung des Polynoms p. Stelle dazu ein passendes lineares Gleichungssystem auf und löse dies mit dem Gaussalgorithmus.

3) Gaussalgorithmus mit Parameter

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \, .$$

wobei α ein freier Parameter ist. Bestimme die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$, die Lösung ist ein Vektor, in dem α als Parameter auftritt.

Führe dazu den Gaussalgorithmus mit der augmentierten Matrix (A, b) auf und behandle α bei den Umformungen wie eine unbekannte Zahl.

Multiple Choice Aufgaben

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & + & z & = & 5, \\ 2x & & & + & z & = & 3, \\ 6x & + & y & - & 2z & = & 3. \end{array}$$

Führt man den ersten Schritt des Gaussalgorithmus mit dem Pivot der ersten Zeile aus, so ergibt sich die augmentierte Matrix

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -3/4 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \end{array}\right)$

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \end{array}\right)$

(c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & -4 & -7 \end{array}\right)$

2. Die augmentierte Matrix eines linearen Gleichungssystems laute

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & c & -1 & 0 \\ 3 & d & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Wenn man im Gaussalgorithmus den Eintrag 1 oben links als erstes Pivot wählt, dann muss man im zweiten Eliminationsschritt Gleichungen vertauschen falls

(a) $c = -8$

(b) $c = 8$

(c) $c = 2$

3. Wenn man im Gaussalgorithmus den Eintrag 1 oben links als erstes Pivot wählt, dann findet man im zweiten Eliminationsschritt ein Pivot ausser wenn

(a) $c = 8$, $d = -6$

(b) $c = -8$, $d = 6$

(c) $c = 8$, $d = 8$