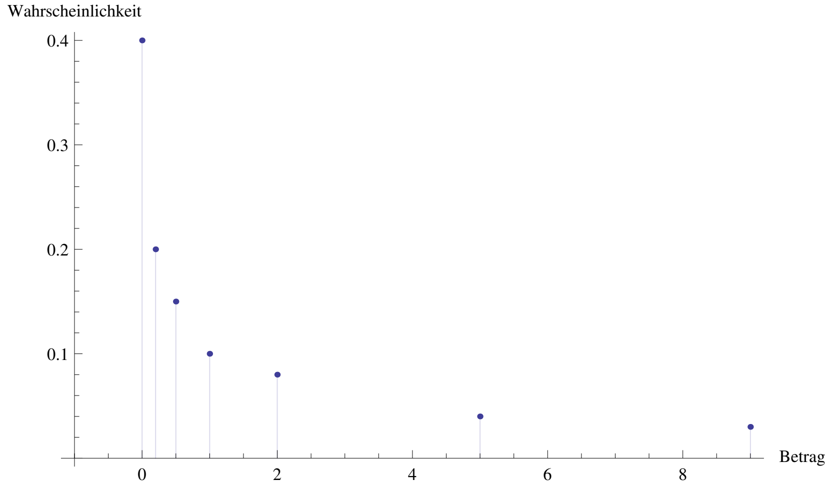
Lösung 12

1) Zu (a):



Zu (b): Den Erwartungswert erhalten wir als:

$$\sum_i x_i \cdot P[X = x_i] = 0.00 \cdot 0.40 + 0.20 \cdot 0.20 + \cdots + 9.00 \cdot 0.03 = 0.845,$$

d.h. er beträgt 84.5 Rappen. Für die Varianz rechnen wir:

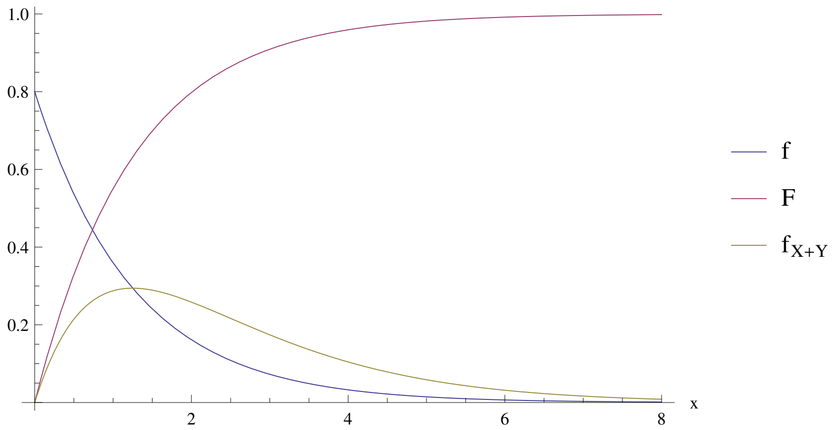
$$\sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot P[X = x_i] = (0.00 - 0.845)^2 \cdot 0.40 + \cdots + (9.00 - 0.845)^2 \cdot 0.03 = 3.181.$$

Zu (c): Finanziell ausbezahlen tut sich dieses Spiel nicht, da man im Erwartungswert ("im Schnitt") pro eingesetzten Franken 15.5 Rappen verliert. Kalkuliert man das Vergnügen des Spielens ans sich mit ein, so kommen einzelne Personen offenbar zu einem anderen Schluss, sonst würden diese Automaten nicht benützt.

2) Zu (a):

$$f_{X+Y}(x) = \int_0^x f_X(u) f_Y(x-u)\ \mathrm{d}u = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(x-u)}\ \mathrm{d}u = \lambda^2 \int_0^x e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}u = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

Zu (b): Für $\lambda = 4/5$ bekommt man:



3) (a) Mit Mathematica kann man überprüfen, dass

$$\bar{x} = -18.8 \text{ und } \widehat{\sigma}_x = 96.634.$$

(b) Die relevanten Parameter sind $n = 10$, $\bar{x} = -18.8$, $\widehat{\sigma}_x = 96.634$ und $\mu = 0$. Die Teststatistik

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\widehat{\Sigma}_x/\sqrt{n}}$$

ist nach Annahme t-verteilt mit 9 Freiheitsgraden. Der Annahmebereich ist $[-2.262, 2.262]$, denn aus $P[T \in [-q, q]] = 1 - 0.05 = 0.95$ also nach Umformung $P[T \leq q] = 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975$ folgt mit `Mathematica`, dass $q = 2.262$. Der Verwerfungsbereich ist gleich

$$\mathbb{R} \setminus [-2.262, 2.262] = (-\infty, -2.262) \cup (2.262, \infty).$$

Die Beobachtung ist

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\widehat{\sigma}_x/\sqrt{n}} = \frac{-18.8 - 0}{96.634/\sqrt{10}} = -0.615.$$

Folglich $t \in [-2.262, 2.262]$, also H_0 wird beibehalten.

4) (a) Es ist einfach zu sehen mit Mathematica, dass man mit $c_1 = 18$ und $c_2 = 36$ gerade

$$\sum_{k=0}^{c_1} \binom{92}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{18} \binom{92}{k} 0.3^k 0.7^{92-k} = 0.016 \leq 0.025 = \alpha/2$$

und

$$\sum_{k=c_2}^{n} \binom{92}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=36}^{92} \binom{92}{k} 0.3^k 0.7^{92-k} = 0.023 \leq 0.025 = \alpha/2$$

hat, c_1 ist der grösste Zahl beziehungsweise c_2 ist der kleinste Zahl mit der obigen Eigenschaft. Man hat $t = 22 \in [19, 35] = [c_1 + 1, c_2 - 1]$ also wird die Nullhypothese beibehalten. Alternativ hätte man mit diesen Zahlen die Näherungsformel mit der Normalverteilung verwenden können, i.e. die Approximationsannahme

$$T \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

machen.

(b) Das 95%-Vetrauensintervall für den Anteil Privatfahrzeug-Benützer ist gerade

$$[c_1 + 1, c_2 - 1] = [19, 35]$$

nach Definition von dem Vetrauensintervall im diskreten Fall. Wenn man die Approximation durch die Normalverteilung in (a) verwendet, dann ist man im stetigen Fall und man bekommt dementsprechend ein ähnliches (aber kein genau gleiches) 95%-Vetrauensintervall.