

## Musterlösung Serie 1

1) Die augmentierte Matrix zum Gleichungssystem ist

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Durch Zeilenumformungen bringen wir die Matrix auf Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{IV-I} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{IV-2II} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{IV+4III} \left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & -8 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Die augmentierte Matrix hat 4 Pivotelemente. Die Lösung liest man von unten nach oben ab:

- Zeile IV bedeutet  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 = -8$ , das ist nur für  $x_4 = -4$  erfüllt.
- Zeile III bedeutet  $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = -2$ , Einsetzen von  $x_4 = -4$  ergibt dann  $x_3 - 4 = -2$ , also  $x_3 = 2$ .
- Zeile II bedeutet  $0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 0$ , Einsetzen von  $x_4 = -4$  und  $x_3 = 2$  ergibt  $x_2 + 2 - 4 = 0$ , also  $x_2 = 2$ .
- Zeile I bedeutet  $1x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 1$ , Einsetzen von  $x_4 = -4$ ,  $x_3 = 2$  und  $x_2 = 2$  ergibt  $x_1 - 2 + 2 - 4 = 1$ , also  $x_1 = 5$ .

Damit ist der Lösungsvektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2) Wir übersetzen eine Bedingung der Form  $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = y$  (in der  $a, b, c, d$  die Unbekannten, und  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  die Koeffizienten sind) in eine Zeile

$$(\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta \ | \ y)$$

für das lineare Gleichungssystem:

Einsetzen von  $x = 0$  in das Polynom ergibt  $p(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = d$ , dieser Wert soll  $= 2$  sein, also erhalten wir die Zeile  $(0001 | 2)$ . Einsetzen von  $x = 1$  in das Polynom ergibt  $p(1) = a + b + c + d$ , dieser Wert soll  $= 4$  sein, also erhalten wir die Zeile  $(1111 | 4)$ . Die erste Ableitung des Polynoms ist  $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ , wenn wir hier  $x = 1$  einsetzen erhalten wir  $p'(1) = 3a + 2b + c + 0 \cdot d$ , dies soll  $= 2$  sein, also als Zeile  $(3210 | 2)$ . Die zweite Ableitung ist  $p''(x) = 6ax + 2b$ , hier  $x = 1$  eingesetzt

ergibt  $6a + 2b + 0 + 0$ , dies soll  $= 2$  sein, also als Zeile  $(6 \ 2 \ 0 \ 0 \ | \ 2)$ . Die vier Zeilen zusammengesetzt ergibt die augmentierte Matrix

$$(A, y) = \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Der Lösungsvektor

$$z = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

des linearen Gleichungssystems  $Az = y$  enthält dann die Koeffizienten des gesuchten Polynoms. Zeilenumformungen ergeben

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-3\text{II}} \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -10 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-6\text{II}} \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -10 \\ 0 & -4 & -6 & -6 & -22 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{IV}-4\text{III}} \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 18 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Zeilentausch}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II: } (-1)}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array} \right).$$

Wir haben also wieder 4 Pivotelemente. Der letzte Umformungsschritt war für die Zeilenstufenform nicht unbedingt notwendig, es vereinfacht aber das Ablesen der Lösung wenn die Pivots normiert sind. Wir lesen die Lösung  $(a, b, c, d)$  ab:

- Zeile IV: Hier ist  $d = 2$ .
- Zeile III: Aus  $2c + 6d = 18$  und  $d = 2$  folgt  $c = 3$ .
- Zeile II: Aus  $b + 2c + 3d = 10$  und  $d = 2$  sowie  $c = 3$  folgt  $b = -2$ .
- Zeile I: Aus  $a + b + c + d = 4$  und  $d = 2$ ,  $c = 3$  sowie  $b = -2$  folgt  $a = 1$ .

Wir haben also den Lösungsvektor

$$z = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

und das gesuchte Polynom ist

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2.$$

Es ist das einzige Polynom dritten Grades, dass die vier Bedingungen aus der Aufgabe erfüllt.

### 3) Umformen der augmentierten Matrix ergibt

$$(A, b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \alpha \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}-2\text{II}} \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 & \alpha - 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \alpha \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}+\text{II}}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & \alpha - 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \alpha \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{IV}-2\text{I}} \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & \alpha - 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 - \alpha \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Zeilentausch}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \alpha - 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 - \alpha \end{array} \right)$$

Die Matrix hat jetzt Zeilenstufenform, und wir können die Lösung ablesen:

- Aus Zeile IV folgt  $x_4 = \alpha - 6$ .
- Zeile III ist  $x_3 + x_4 = \alpha - 3$ , mit  $x_4$  eingesetzt also  $x_3 + \alpha - 6 = \alpha - 3$ , woraus  $x_3 = 3$  folgt.
- Zeile II ist  $x_2 + 2x_3 = 1$ , eingesetzt also  $x_2 + 6 = 1$ , woraus  $x_2 = -5$  folgt.
- Zeile I ist  $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ , eingesetzt also  $x_1 - 5 + 3 = 2$ , also  $x_1 = 4$ .

Der Lösungsvektor ist also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \\ \alpha - 6 \end{pmatrix}.$$

## Multiple Choice Aufgaben

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 5, \\ 2x &+ z = 3, \\ 6x + y - 2z &= 3. \end{aligned}$$

Führt man den ersten Schritt des Gaußalgorithmus mit dem Pivot der ersten Zeile aus, so ergibt sich die augmentierte Matrix

(a)  $\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -3/4 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \end{array} \right)$

(b)  $\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \end{array} \right)$

✓ (c)  $\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & -4 & -7 \end{array} \right)$

2. Die augmentierte Matrix eines linearen Gleichungssystems laute

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & c & -1 & 0 \\ 3 & d & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Wenn man im Gaußalgorithmus den Eintrag 1 oben links als erstes Pivot wählt, dann muss man im zweiten Eliminationsschritt Gleichungen vertauschen falls

(a)  $c = -8$

Nein, denn nach dem ersten Schritt lautet die Matrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & c-8 & 3 & 0 \\ 0 & d+6 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

also ist  $c - 8 = -8 - 8 = -16 \neq 0$ , wir finden also ein Pivot in der zweiten Zeile.

✓ (b)  $c = 8$

Richtig, denn nach dem ersten Schritt lautet die Matrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & c-8 & 3 & 0 \\ 0 & d+6 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

also ist  $c - 8 = 8 - 8 = 0$ , wir finden also kein Pivot in der zweiten Zeile.

(c)  $c = 2$

Nein, denn nach dem ersten Schritt lautet die Matrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & c-8 & 3 & 0 \\ 0 & d+6 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

also ist  $c - 8 = 2 - 8 = -6 \neq 0$ , wir finden also ein Pivot in der zweiten Zeile.

3. Wenn man im Gaußalgorithmus den Eintrag 1 oben links als erstes Pivot wählt, dann findet man im zweiten Eliminationsschritt ein Pivot ausser wenn

✓ (a)  $c = 8, d = -6$

Richtig, denn nach dem ersten Schritt lautet die Matrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & c-8 & 3 & 0 \\ 0 & d+6 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

und es ist  $c - 8 = 8 - 8 = 0$  und  $d + 6 = -6 + 6 = 0$ , also finden wir kein zweites Pivot.

(b)  $c = -8, d = 6$

Nein, denn nach dem ersten Schritt lautet die Matrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & c-8 & 3 & 0 \\ 0 & d+6 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Es ist  $c - 8 = -8 - 8 = -16 \neq 0$ , also steht in der zweiten Zeile ein Pivot.

(c)  $c = 8, d = 8$

Nein, denn nach dem ersten Schritt lautet die Matrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & c-8 & 3 & 0 \\ 0 & d+6 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Es ist  $d + 6 = 8 + 6 = 14 \neq 0$ , also steht in der dritten Zeile ein Pivot.