

Lösungen 2

1) Zu a): Umformen der augmentierten Matrix ergibt

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 9 & 5 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-2\text{I}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 9 & 5 & 6 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\text{IV}+\text{I}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 12 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 9 & 5 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-\text{V}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 9 & 5 & 6 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\text{V}-2\text{II}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{V}-3\text{III}} \left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Der Rang von A ist der Rang von (A, b) , nämlich 4, also ist das Gleichungssystem lösbar.

Teil b): Die zu x_1, x_2, x_4, x_5 gehörenden Spalten haben ein Pivotelement, also sind diese Variablen festgelegt. Die Spalten zu x_3 und x_6 haben kein Pivot, diese Variablen sind also frei. Wir setzen $x_3 = s \in \mathbb{R}$ und $x_6 = t \in \mathbb{R}$ ein, und erhalten durch Ablesen:

- Zeile V ist eine Nullzeile, sie gibt keine Aussage für die Lösungsmenge.
- Zeile IV: Die Zeile bedeutet $3x_5 + x_6 = 2$, also $x_5 = \frac{2-t}{3}$.
- Zeile III: Die Zeile bedeutet $2x_4 + 2x_5 = 1$, also $x_4 = \frac{1-2x_5}{2} = \frac{1-2\frac{2-t}{3}}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{t}{3}$.
- Zeile II: Die Zeile bedeutet $x_2 + 2x_3 + x_6 = 0$, also $x_2 = -2s - t$. Die freien Variablen s und t können nicht weiter ersetzt werden.
- Zeile I: Die Zeile bedeutet $x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_6 = 3$, also $x_1 = 3 - 2x_2 - 4s - x_4 - 2t = 3 + 4s + 2t - 4s + \frac{1}{6} - \frac{t}{3} - 2t = \frac{19}{6} - \frac{1}{3}t$.

Damit ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$L(A, b) = \left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{19}{6} - \frac{1}{3}t \\ -2s - t \\ s \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{3}t \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t \\ t \end{array} \right) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für Teil c) sei auf das NB-file verwiesen.

2) Zu a): Umformen der Matrix gibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a & a \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{V-2II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a & a \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{IV-aI} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a & a \\ 0 & 2-2a & 1 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{IV-(2-2a)II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -3+4a & -1+2a-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} (*)$$

Hier ist die erste Fallunterscheidung notwendig: das $-a$ in der dritten Zeile ist entweder ein Pivot (falls $a \neq 0$ ist), oder nicht.

Fall 1: $a = 0$

Wir nehmen $a = 0$ an, also löschen wir a überall in der Matrix, und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Tausch}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier stehen 3 Pivotelemente, also hat in diesem Fall A den Rang 3.

Fall 2: $a \neq 0$

Wir müssen zurück zur Stelle (*) vor der letzten Fallunterscheidung gehen, und mit der Annahme $a \neq 0$ weiter umformen. Dank der Annahme können wir jetzt Zeile III durch $-a$ und Zeile V durch a dividieren, und erhalten

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3+4a & -1+2a-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV \text{ eliminieren}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Tausch}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier stehen 4 Pivotelemente, also ist in diesem Fall der Rang 4.

Die richtige Antwort zur Aufgabe ist also

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{falls } a = 0 \\ 4 & \text{falls } a \neq 0 \end{cases}.$$

Mathematica erkennt hier keine Fallunterscheidungen. Leider teilt Mathematica das nicht mit, und tut einfach so als gäbe es nur diesen einen Fall. Der Befehl **Reduce** erkennt dagegen Fallunterscheidungen.

3) Umformen ergibt

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 2 & 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & 6\lambda & \lambda & 3\lambda^2-2 & 2+3\lambda^2 \end{array} \right) \xrightarrow{III-I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 2 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 6\lambda & \lambda & 3\lambda^2-2 & 2+3\lambda^2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{IV}-3\lambda\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 2 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda & -2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}+2\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 2 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda-2 & 2 \end{array} \right).$$

Diese Umformungen sind für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ richtig, da nirgends dividiert wurde. Die Zeilenstufenform hängt jetzt von λ wie folgt ab:

- $\lambda = 1$: Dann lautet die letzte Zeile $(0\ 0\ 0\ 0\ | 2)$, und das System ist unlösbar.
- $\lambda = 0$: Dann müssen wir weiter umformen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Tausch}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Diese Zeilestufenform ist lösbar. Die Spalte 3 hat kein Pivot, also gibt es einen freien Parameter und damit unendlich viele Lösungen.

- $\lambda \neq 0, 1$: In diesem Fall ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 2 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda-2 & 2 \end{array} \right)$$

schon in Zeilenstufenform, die Diagonalelemente sind alle nicht Null und damit Pivots. Jede Spalte hat ein Pivot und es gibt keine Nullzeilen, also hat dieses System genau eine Lösung.

- 4) (a) Sei $u = v = w = 2$ und $a = 0$. Dann hat das System genau eine Lösung: $\mathbb{L} = \{(2, 2, 2)\}$.
 Betrachte nun $a \neq 0$. Wegen $1 - a^3 = (1 - a)(a^2 + a + 1)$ und $1 - a^2 = (1 - a)(1 + a)$ sind diese Term Null, falls $a = 1$ respektive $a = \pm 1$ ist. ($a^2 + a + 1$ hat keine reelle Nullstellen; es genügt daher, die Fälle $a = \pm 1$ und $a \neq \pm 1$ zu betrachten.)
 Sei $a = 1$. Dann haben wir wegen (\star)

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

also hat das System unendlich viele Lösungen:

$$a = 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(s, t, 2 - s - t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

Sei $a = -1$. Nun ist (wiederum aus (\star))

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ \text{III} - \text{II} & 0 & 0 & 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

und das System hat unendlich viele Lösungen: $z = 2, y = t \in \mathbb{R}, x = 2 + y - z = t$, d.h.

$$a = -1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(t, t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Das System hat genau eine Lösung, mit $z = \frac{2(1-a)}{(1-a)(a^2+a+1)} = \frac{2}{a^2+a+1}$,
 $y = \frac{2(1-a)-a^2(1-a)z}{(1-a)(1+a)} = \frac{2}{a^2+a+1}$ und $x = 2 - ay - a^2z = \frac{2}{a^2+a+1}$, d.h.

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \frac{2}{a^2+a+1} (1, 1, 1) \right\}.$$

Insbesondere gibt es (für $u = w = v = 2$) kein $a \in \mathbb{R}$ so, daß das System keine Lösung hat.
HINWEIS: Benützt man beim zweiten Eliminationsschritt das Pivotelement als $1 - a^2$ so muss bereits dort eine Fallunterscheidung gemacht werden, d.h.: $1 - a^2 \neq 0$.

(b) Für $a = -1$ haben wir mit (\star)

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & u \\ 0 & 0 & 2 & v+u \\ \text{III} - \text{II} & 0 & 0 & 2 \\ \hline & & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & u \\ 0 & 0 & 2 & v+u \\ 0 & 0 & 0 & w-u \\ \hline & & & \end{array},$$

somit hat das System keine Lösung (betrachte die letzte Zeile), falls $u \neq w$ ist.

Multiple Choice

Jemand hat ein lineares Gleichungssystem mit 2 reellen Parametern α und β nach Gauss reduziert und folgende augmentierte Matrix erhalten

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & \alpha + 1 & 0 & \beta^2 - 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 & \beta + 1 \end{array} \right]$$

1. Für $\alpha = 2$ und beliebiges β hat das System genau eine Lösung.

(a) Richtig.

✓ (b) Falsch.

Für $\beta \neq -1$ hat das System keine Lösung, denn die letzte Zeile ist $0 = \beta + 1 \neq 0$: ein Widerspruch.

2. Für $\alpha = 2$ und $\beta = -1$ hat das System genau eine Lösung.

(a) Richtig.

✓ (b) Falsch.

Das System hat unendlich viele Lösungen, denn die letzte Zeile ist $0 = 0$; das ist immer wahr. Es bleiben 2 Gleichungen und 3 Unbekannte.

3. Für $\alpha \neq 2$ und beliebiges β hat das System genau eine Lösung.

(a) Richtig.

✓ (b) Falsch.

Für $\alpha = -1$ und zum Beispiel $\beta = 0$ hat das System keine Lösung, denn Zeile 2 lautet $0 = -1$: ein Widerspruch.

4. Für $\beta = -1$ hat das System immer eine Lösung.

✓ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Zeilen 2 und 3 sind jeweils entweder $0 = 0$, dann gibt es unendlich viele Lösungen; oder ergeben $x_2 = 0$ bzw. $x_3 = 0$. In jedem Fall hat das System mindestens eine Lösung.

5. Für $\alpha = 3$ ist $x_1 = \frac{1}{8}(\beta^2 + 3)$, $x_2 = \frac{1}{4}(\beta^2 - 1)$, $x_3 = \beta + 1$ die einzige Lösung des Systems.

(a) Richtig.

✓ (b) Falsch.

Die richtige Lösung ist $x_1 = \frac{1}{8}(\beta^2 - 12\beta + 3)$, $x_2 = \frac{1}{4}(\beta^2 - 1)$, $x_3 = \beta + 1$.

6. Für $\alpha = 2$ and $\beta = -1$ lautet die allgemeine Lösung

$$x_1 = 2 - \frac{3}{2}t, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

✓ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Für x_3 gibt es kein Pivot, also ist $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Die zweite Zeile ergibt $x_2 = 0$, und die erste $2x_1 + 3t = 4$, also $x_1 = 2 - \frac{3}{2}t$.