

Serie 3

1) Gleichungssysteme in der Ebene

Betrachte die folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$(1) 2x_1 - x_2 = 0, \quad (2) x_1 + x_2 = 3, \quad (3) x_1 = 3x_2 - 5, \quad (4) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 = 3x_2 - 5 \end{cases}.$$

- Gebe die Lösungsmengen der Systeme (1),(2) und (3) an.
- Skizziere die Lösungsmengen aus Aufgabe (a) als Geraden in \mathbb{R}^2 .
- Stelle die Lösungsmenge von (4) mit Hilfe der Lösungsmengen von (1), (2) und (3) dar. Ist (4) lösbar?

2) Orts- und Richtungsvektoren

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 12 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

- Bringe die augmentierte Matrix zum System auf Zeilenstufenform und entscheide, ob das System lösbar ist. Bestimme den Rang r der Koeffizientenmatrix. Die Dimension k der Lösungsmenge entspricht der Anzahl der freien Parameter. Bestimme diese.
- Berechne die Lösungsmenge, und drücke sie durch Orts- und Richtungsvektoren aus.
- Prüfe Dein Ergebnis mit Mathematica: Der Befehl `NullSpace[A]` berechnet einen Satz Richtungsvektoren, `LinearSolve[A,b]` einen Ortsvektor zum System $Ax = b$.

Bemerkung (Tipp zu Aufgabe 2b und 2c). Ist A eine reelle $n \times m$ -Matrix, so ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystem $Ax = 0$ gegeben durch

$$L(A, 0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

Man kann zeigen, dass $L(A, 0)$ ein linearer Untervektorraum von \mathbb{R}^n ist. Die Dimension der Lösungsmenge entspricht der Anzahl freier Parameter, die wir durch das Lösen des Gleichungssystems mit dem Gauss-Algorithmus erhalten.

Analog definieren wir die Lösungsmenge des (inhomogenen) Gleichungssystem $Ax = b$ als die Menge

$$L(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\},$$

wobei $b \in \mathbb{R}^m$.

Sei r die Dimension des Lösungsraumes $L(A, 0)$. Sind $\{v_1, \dots, v_r\}$ r linear unabhängige Vektoren in $L(A, 0)$, so können wir jeden Vektor in $L(A, 0)$ durch eine Linearkombination der $\{v_1, \dots, v_r\}$ darstellen. Also gilt, dass

$$L(A, 0) = \{\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_r v_r \mid \gamma_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, r\}.$$

Ist p eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$, so ist

$$L(A, b) = \{p + \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_r v_r \mid \gamma_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, r\}.$$

Wir bemerken, dass die Wahl der partikulären Lösung p und der Lösungsvektoren v_i des homogenen Gleichungssystem nicht eindeutig sind. Ist $\{v'_1, \dots, v'_r\}$ eine weitere Wahl von r linear unabhängigen Vektoren in $L(A, 0)$ und p' eine andere partikuläre Lösung von $Ax = b$, so gilt

$$\begin{aligned} L(A, b) &= \{p + \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_r v_r \mid \gamma_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, r\} \\ &= \{p' + \gamma'_1 v'_1 + \dots + \gamma'_r v'_r \mid \gamma'_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, r\}. \end{aligned}$$

3) Mathematica und Parameter

Das LGS $\begin{pmatrix} c & 1 \\ c & d \\ 1 & c \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat zwei Parameter $c, d \in \mathbb{R}$.

- (a) Sei $d = 1$ und $c = 2$. Löse das Gleichungssystem mit Hilfe von Mathematica. Wie viele Lösungen gibt es?
- (b*) [Zusatzaufgabe] Verwende den Befehl **Reduce** um das Gleichungssystem zu lösen. Lese aus dem Output von **Mathematica** die notwendigen Fallunterscheidungen ab, und lese für jeden der gefundenen Fälle die Lösungsmenge des Gleichungssystems aus dem Output ab.

Die Eingabe für Mathematica ist `Reduce[{c*x1+x2==1, c*x1+d*x2==1, x1+c*x2==2}, {x1, x2}]` wobei die letzte Klammer Mathematica mitteilt, dass x_1 und x_2 hier die Unbestimmten des Gleichungssystems, und c, d freie Parameter sind. Im Output bedeutet das Symbol `&&` *und*, das Symbol `||` bedeutet *oder*.

- (c*) [Zusatzaufgabe] Nicht alle möglichen Werte von c und d werden in der Ausgabe von Mathematica abgedeckt. Formuliere die fehlenden Fälle, und bestimme die Lösungsmenge des LGS in diesen Fällen durch Rechnung per Hand.

4) Multiple Choice

Die Multiple Choice Aufgaben können online auf echo.ethz.ch gelöst werden.

Abgabetermin : Am Freitag, den 14. März spätestens um 11:00 Uhr.