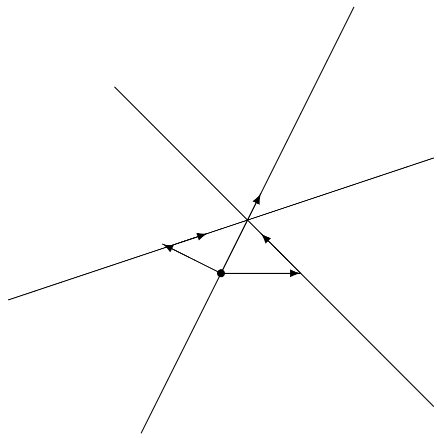
Lösungen 3

1) Zu (a): Die Matrizen zu den ersten drei Systemen sind alle vom Format 1×2, und haben schon Zeilenstufenform. Sie haben alle den Rang Eins (eine echte Zeile, keine Nullzeilen). Die Systeme (1),(2) und (3) sind daher lösbar mit unendlich vielen Lösungen. Im Fall einer einzeiligen Matrix $A = (a_1\, a_2)$ kann man beide Vektoren sofort ablesen:

- System (1): Die homogene Gleichung $Ax = 0$ hat die Lösung $x_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- System (2): Die Lösungen sind von der Form $\{ \begin{pmatrix} 3-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R} \}$
- System (3): Die Lösungen sind von der Form $\{ \begin{pmatrix} -5+3\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R} \}$

Zu (b): Die Geraden stellt man auf, indem man den Ortsvektor x_O einträgt, und von ihm aus in Richtung des Richtungsvektors x_R die Gerade zeichnet:



Die drei Geraden haben nur einen gemeinsamen Schnittpunkt: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Zu (c): Ein Vektor x löst das System (4) genau dann wenn er die Systeme (1), (2) und (3) löst, denn diese sind jeweils die Zeilen von (4). Also ist $L_4 = L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \}$ der Schnitt der drei Lösungsmengen.

2) (a)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & -6 & -2 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{III}-\text{I}\\ \text{IV}+\text{I}\\ \text{V}+2\text{I}}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{IV}+\text{II}\\ \text{V}+2\text{II}}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{V,IV}-\text{III}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Da nur vollständige Nullzeilen am Ende stehen ist das System lösbar. Der Rang von A ist die Anzahl der Pivots, also drei. Die Anzahl der Spalten ist $m = 6$, also ist die Dimension der Lösungsmenge $k = m - r = 6 - 3 = 3$, soviele freie Parameter sind einzubauen.

(b) Wir ersetzen für die Spalten ohne Pivot die Unbestimmten: x_1 durch r, x_3 durch s, und x_5 durch t. Aus der letzten Zeile lesen wir $x_6 = 4$ ab, aus der zweiten Zeile dann $x_4 = 1 - t$, und aus der ersten $x_2 = -1 - 2s - t$. Beachte dass r ein freier Parameter ist, obwohl er in keinem der gebundenen Parameter vorkommt. Damit ist die Lösungsmenge

$$L(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ -1-2s-t \\ s \\ 1-t \\ t \\ 4 \end{pmatrix} r,s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} r,s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) Zu diesem Ergebnis kommt man auch mit Mathematica Allerdings sind weder der Ortsvektor noch die Richtungsvektoren eindeutig bestimmt, sie beschreiben aber immer die gleiche Lösungsmenge L. Da $L(A,0)$ ein Untervektorraum in $\mathbb{R}^m$ der Dimension r ist, bildet jede Menge aus r linear unabhängigen Vektoren $\{v_1, \dots, v_r\}$ eine Basis des Untervektorraumes $L(A,0)$. Es gilt für je zwei Basen $\{v_1, \dots, v_r\}$ und $\{v'_1, \dots, v'_r\}$ von $L(A,0)$, dass

$$\begin{aligned} L(A,0) &= \{\gamma_1 v_1 + \dots \gamma_r v_r | \gamma_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, r\} \\ &= \{\gamma'_1 v'_1 + \dots \gamma'_r v'_r | \gamma'_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, r\}. \end{aligned}$$

Sind p und p' zwei verschiedene Lösungen des Gelichungssystems $Ax = b$, so gilt

$$A(p - p') = b - b = 0.$$

Das heisst $(p - p')$ ist eine Lösung von $Ax = 0$ und somit ist $p - p' \in L(A,0)$. Es folgt

$$\begin{aligned} L(A,b) &= p + L(A,0) \\ &= p' + (p - p') + L(A,0) \\ &= p' + L(A,0). \end{aligned}$$

3) (a) Wir erhalten das Gleichungssystem Das LGS $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wir definieren in mathematica die Matrix $A = \{\{2,1\},\{2,1\},\{1,2\}\}$ und den Vektor $b = \{1,1,2\}$. Mit dem Befehl LinearSolve[A, b] erhalten wir die Lösung $\{0,1\}$. Die Lösung lautet also $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) Die Ausgabe von Mathematica ist

$$\left(d == 1 \;\&\&\; -1 + c^2 \neq 0 \;\&\&\; \text{x1} == \frac{-2+c}{-1+c^2} \;\&\&\; \text{x2} == 1 - c\text{x1}\right)$$

$$|| \quad \left(-1 + d \neq 0 \;\&\&\; c == \frac{1}{2} \;\&\&\; \text{x1} == 2 \;\&\&\; \text{x2} == 1 - \frac{\text{x1}}{2}\right)$$

Richtig abgelesen ergibt das

- Fall $c \neq \pm 1$ und $d = 1$: Dann ist $x_1 = \frac{c-2}{c^2-1}$ und $x_2 = 1 - cx_1 = \frac{2c-1}{c^2-1}$. In diesem Fall ist die Lösungsmenge also
$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{c-2}{c^2-1} \\ \\ \frac{2c-1}{c^2-1} \end{pmatrix} \right\},$$
also gibt es nur genau eine Lösung des Systems.

- Fall $c = \frac{1}{2}$ und $d \neq 1$: Dann ist $x_1 = 2$ und $x_2 = 1 - \frac{x_1}{2} = 0$. Auch in diesem Fall gibt es nur genau eine Lösung des Systems:
$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Das sind allerdings nicht alle Fälle, es fehlen die Fälle $c = 1$, $c = -1$ (für beliebige $d \in \mathbb{R}$) und $(c \neq \frac{1}{2}, d \neq 1)$.

Fall $c = 1$: Hier erhalten wir durch Umformen auf die Zeilenstufenform
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & d & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II,III}-\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & d-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
Aufgrund der letzten Zeile ist dieses System unlösbar, die Pivotunterscheidung $d = 1$ oder $d \neq 1$ ist nicht notwendig.

Fall $c = -1$: Hier erhalten wir durch Umformen auf die Zeilenstufenform
$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -1 & d & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & d-1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & d-1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$
Auch dieses System ist nicht lösbar.

Fall $c \neq \frac{1}{2}$ und $d \neq 1$: Hier erhalten wir durch Umformen auf die Zeilenstufenform
$$\left(\begin{array}{cc|c} c & 1 & 1 \\ c & d & 1 \\ 1 & c & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} c & 1 & 1 \\ 0 & d-1 & 0 \\ 1 & c & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}-c\text{III}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1-c^2 & 1-2c \\ 0 & d-1 & 0 \\ 1 & c & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}:\,(d-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1-c^2 & 1-2c \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & c & 2 \end{array}\right)$$
wobei der letzte Schritt wegen $d \neq 1$ erlaubt ist. Weiteres Umformen ergibt
$$\xrightarrow{\text{I}-(1-c^2)\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1-2c \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & c & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Tausch}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & c & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2c \end{array}\right)$$
Weil in diesem Fall aber $c \neq \frac{1}{2}$ ist, gibt es auch hier keine Lösung des Systems.

(c) Die Ausgabe von Mathematica ist also korrekt, wenn man weiss dass das System nur die lösbaren Fälle ausgibt. Am Output kann man aber nicht mehr erkennen, wie die Fallunterscheidungen entstanden sind.

Multiple Choice Aufgabe

Sei $A = (a_{ik})$ eine (7×4)-Matrix. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & a_{14}x_4 & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & a_{24}x_4 & = & 0, \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & a_{34}x_4 & = & 0, \\ a_{41}x_1 & + & a_{42}x_2 & + & a_{43}x_3 & + & a_{44}x_4 & = & 1, \\ a_{51}x_1 & + & a_{52}x_2 & + & a_{53}x_3 & + & a_{54}x_4 & = & 0, \\ a_{61}x_1 & + & a_{62}x_2 & + & a_{63}x_3 & + & a_{64}x_4 & = & 0, \\ a_{71}x_1 & + & a_{72}x_2 & + & a_{73}x_3 & + & a_{74}x_4 & = & 0, \end{array}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

1. Die Lösungsmenge ist eine (eventuell leere) Teilmenge des $\mathbb{R}^7$.

(a) Richtig.

$\surd$ (b) Falsch.

Alle Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ liegen in $\mathbb{R}^4$, nicht in $\mathbb{R}^7$.

2. Die Lösungsmenge ist eine (eventuell leere) Teilmenge des $\mathbb{R}^4$.

$\surd$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Richtig, alle Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ liegen in $\mathbb{R}^4$.

3. Ein derartiges System kann unendlich viele Lösungen haben.

$\surd$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Ja, zum Beispiel wenn $a_{41} = 1$ und alle anderen a_{ij} gleich Null.

4. Ein derartiges System kann genau eine Lösung haben.

$\surd$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Ja, zum Beispiel wenn $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 1$ und alle anderen a_{ij} gleich Null.

5. Es gibt jedenfalls die triviale Lösung $x = 0$.

(a) Richtig.

$\surd$ (b) Falsch.

Nein, wenn $a_{41} = a_{42} = a_{43} = a_{44} = 0$ gibt es gar keine Lösungen.

6. Die Lösungsmenge ist ein (eventuell nulldimensionaler) Unterraum.

(a) Richtig.

$\surd$ (b) Falsch.

Nein. Bei einem Unterraum gilt (unter anderem), dass für jeden Vektor y im Unterraum auch λy im Unterraum liegt, für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$. Nehmen wir einen Vektor y, für den $Ay = b$ gilt, und betrachten λy. Für dieses gilt $A(\lambda y) = \lambda(Ay) = \lambda b$, also ist dies keine Lösung von $Ax = b$.

7. Es gibt genau dann eine Lösung, wenn die rechte Seite im Spaltenraum von A liegt.

$\surd$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Ja, denn genau dann existiert ein x, so dass $Ax = b$.

8. Wenn die augmentierte Matrix den Rang 5 hat, so gibt es eine Lösung.

(a) Richtig.

$\surd$ (b) Falsch.

Nein, denn in diesem Fall ist b linear unabhängig von den Spalten von A, es liegt also nicht im Spaltenraum von A.

9. Die Menge der Differenzen von zwei Lösungen ist (leer oder) ein Unterraum.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Ja. Wenn $Ax = b$ keine Lösungen hat, ist die Aussage trivial. Ansonsten folgt aus $Ax = b$ und $Ay = b$ für die Differenz $z = x - y$ dass $Az = 0$. Umgekehrt gilt für jedes z mit $Az = 0$, dass $x = y + z$ die Gleichung $Ay = b$ erfüllt, falls $Ax = b$ gilt. Also ist $z = x - y$ die Differenz von zwei Lösungen.

Demnach ist die Menge der Differenzen identisch zur Lösungsmenge von $Ax = 0$. Dies ist ein Vektorraum.

10. Das arithmetische Mittel von zwei Lösungen ist wieder eine Lösung.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Ja. Wenn $Ay = b, Az = b$, so ist $A(1/2(y + z)) = 1/2(Ay + Az) = 1/2(b + b) = b$, also ist $1/2(y + z)$ eine Lösung von $Ax = b$.

11. Werden die letzten drei Gleichungen gestrichen, so besitzt das Restsystem jedenfalls eine Lösung.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Nein,denn wenn $a_{41} = a_{42} = a_{43} = a_{44} = 0$ gibt es gar keine Lösungen.

12. Werden die letzten vier Gleichungen gestrichen, so besitzt das Restsystem nichttriviale Lösungen.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Ja, denn die Verträglichkeitsbedingungen sind bestimmt erfüllt. Weiter gibt es vier Unbekannte, aber höchstens 3 Pivots, also ist die Lösung nicht eindeutig.