

Serie 4

1) Matrizen jonglieren

Prüfe für welche Paare aus den folgenden vier Matrizen das Matrixprodukt existiert. Berechne für diese Möglichkeiten das Produkt (es gibt 16 mögliche Kombinationen, von denen aber nur 7 ein Produkt liefern).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = (3 \ 1), \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2) Rechenregeln für Matrizen

Gegeben seien diese Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = (3 \ 1), \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Berechne die folgenden Matrizen mit **Mathematica** (falls die Ausdrücke existieren):

$$X \cdot Y, \quad Y \cdot X, \quad (X \cdot Y)^2, \quad X^2 \cdot Y^2, \quad (A + C)^2, \quad A^2 + 2AC + C^2.$$

Für die beiden gegebenen Matrizen A und C ist die binomische Formel offensichtlich falsch. Finde eine möglichst einfache Bedingung für beliebige quadratische Matrizen A und C , so dass $(A + C)^2 = A^2 + 2AC + C^2$ gilt.

Matrizen werden in **Mathematica** mit dem Satzpunkt `.` multipliziert, um die Matrixmultiplikation von der Multiplikation mit einer Zahl zu unterscheiden. Die n -te Potenz bekommt man mit dem Befehl `MatrixPower[B,n]`.

3) Die Drehmatrix

Die Drehmatrix zum Winkel α (im Bogenmass) ist

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die Multiplikation von D_α mit den Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von links (d.h. a geht über in $D_\alpha \cdot a$) die Vektoren jeweils um α gegen den Uhrzeigersinn dreht. Fertige eine Skizze zu beiden Vektoren an.

(b) Bestimme ohne zu rechnen die Matrizen $D_\alpha \cdot D_\beta$ für zwei Winkel α und β , D_α^k (die k -te Potenz von D_α) und D_α^{-1} (das Inverse von D_α ist diejenige Matrix, welche die Drehung um α wieder rückgängig macht). Hinweis: Diese Matrizen sind wieder Drehmatrizen.

(c) Welche Drehmatrizen sind symmetrisch ($D^T = D$), welche sind antisymmetrisch ($D^T = -D$)?

4) Multiple Choice

Die Multiple Choice Aufgaben können online auf echo.ethz.ch gelöst werden.

Abgabetermin : Am Freitag, den 21. März spätestens um 11:00 Uhr.