D-CHAB **Frühlingssemester 2017**
Grundlagen der Mathematik II **Dr. Marcel Dettling**

Lösung 4

1) Nur für die folgenden Wahlen kann man das Produkt bilden:

$A \cdot A$ mit Dimension $(2,2) \times (2,2) = (2,2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

$A \cdot Y$ mit Dimension $(2,2) \times (2,1) = (2,1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

$B \cdot A$ mit Dimension $(3,2) \times (2,2) = (3,2)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

$B \cdot Y$ mit Dimension $(3,2) \times (2,1) = (3,1)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

$X \cdot A$ mit Dimension $(1,2) \times (2,2) = (1,2)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \end{pmatrix} .$$

$X \cdot Y$ mit Dimension $(1,2) \times (2,1) = (1,1)$, Ergebnis ist also eine Zahl:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \end{pmatrix} = 8 .$$

$Y \cdot X$ mit Dimension $(2,1) \times (1,2) = (2,2)$, Ergebnis ist also eine Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} .$$

2) Die Faktoren des Produkts $X \cdot Y$ haben Formate 1×2 und 2×1, das Ergebnis ist vom Format 1×1, es ist also eine Zahl:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \end{pmatrix} = 8 .$$

Das Produkt $Y \cdot X$ hat dagegen Faktoren mit Formaten 2×1 und 1×2, das Ergebnis ist also eine 2×2-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} .$$

Da wir $XY = (8)$ schon wissen, folgt $(XY)^2 = (8^2) = (64) = 64$

Der Ausdruck $X^2 \cdot Y^2$ ist dagegen nicht definiert, denn schon $X^2 = X \cdot X$ gibt es nicht wegen unpassender Formate. Insbesondere gilt für Matrizen *nicht* die Regel $(AB)^2 = A^2B^2$.

Das Quadrat der Summe ist

$$(A+C)^2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^2 \;=\; \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} ,$$

andererseits ist aber

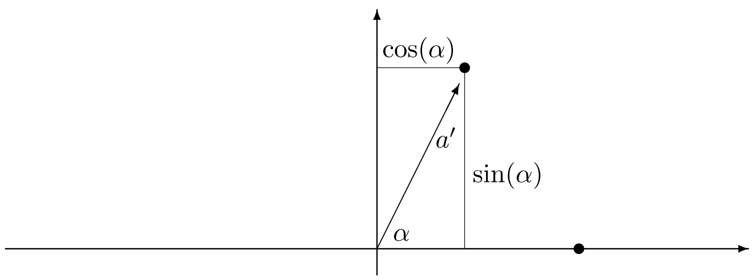
$$A^2+2AC+C^2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \;=\; \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Also gilt für beliebige Matrizen *nicht* die Regel $(A+C)^2 = A^2 + 2AC + C^2$.

Diese Regel gilt nur, wenn man A und B im Produkt vertauschen darf, also $AB = BA$ ist. Denn nur dann bekommt man durch Ausmultiplizieren

$$(A+B)^2 \;=\; (A+B)\cdot(A+B) \;=\; A(A+B)+B(A+B) \;=\; AA+AB+BA+BB \;=\; A^2+2AB+B^2 .$$

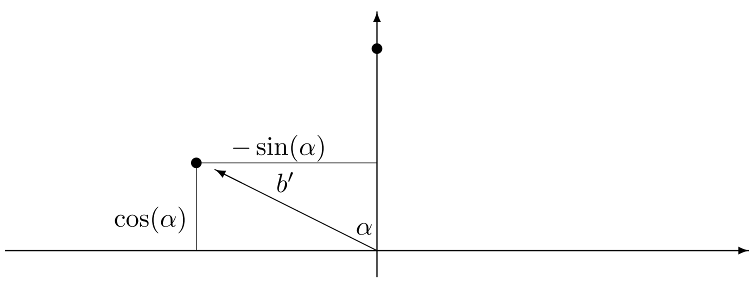
3) Zu a): Der durch a vom Ursprung aus markierte Punkt mit x-Koordinate 1 und y-Koordinate 0 in der Zeichenebene wird durch Drehung um den Winkel α in den Punkt a' überführt:



Da die Hypothenuse die Länge 1 besitzt, hat der neue Punkt die x-Koordinate $\cos(\alpha)$ und die y-Koordinate $\sin(\alpha)$. Das passt zu

$$a' \;=\; D_\alpha \cdot a \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} .$$

Für den Punkt b mit x-Koordinate 0 und y-Koordinate 1 hat der um α gedrehte Punkt b' die x-Koordinate $-\sin(\alpha)$ und die y-Koordinate $\cos(\alpha)$:



passend zu

$$b' \;=\; D_\alpha \cdot b \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} .$$

Zu b): Das Produkt $D_\alpha \cdot D_\beta$ multipliziert mit einem Vektor c dreht diesen erst um den Winkel β, und dann um den Winkel α, also insgesamt um den Winkel $\alpha+\beta$. Damit ist $D_\alpha \cdot D_\beta = D_{\alpha+\beta}$. Ebenso ist D_α^k eine Matrix, die den Vektor c genau k-mal um den Winkel α dreht, also um den Winkel

$k \cdot \alpha$, somit $D_\alpha^k = D_{k\alpha}$. Die inverse Matrix D_α^{-1} wirkt wie die Umkehrung von D_α, es ist diejenige Matrix welche die Drehung um α wieder rückgängig macht, also die Drehung um $-\alpha$, somit $D_\alpha^{-1} = D_{-\alpha}$.

Zu c): Die Drehmatrix ist symmetrisch, wenn $D_\alpha^T = D_\alpha$ gilt, das ist wegen des Vorzeichens oben rechts aber nur möglich, wenn $\sin(\alpha) = 0$ ist, der Wert $\cos(\alpha)$ auf der Diagonalen spielt keine Rolle. Der Sinus ist Null falls α ein ganzzahliges Vielfaches von π ist (bzw. $0°$ und $180°$ im Gradmass). Umgekehrt ist $D_\alpha^T = -D_\alpha$ genau dann, wenn $\cos(\alpha) = 0$ ist, nun spielt der Sinus keine Rolle. Das ist der Fall falls $\alpha - \frac{\pi}{2}$ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist (bzw. $90°$ und $270°$ im Gradmass).

Multiple Choice Aufgabe

1. Die Lösungsmenge ist ein (eventuell nulldimensionaler) Unterraum.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Nein. Bei einem Unterraum gilt (unter anderem), dass für jeden Vektor y im Unterraum auch λy im Unterraum liegt, für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$. Nehmen wir einen Vektor y, für den $Ay = b$ gilt, und betrachten λy. Für dieses gilt $A(\lambda y) = \lambda(Ay) = \lambda b$, also ist dies keine Lösung von $Ax = b$.

2. Die Menge der Differenzen von zwei Lösungen ist (leer oder) ein Unterraum.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Ja. Wenn $Ax = b$ keine Lösungen hat, ist die Aussage trivial. Ansonsten folgt aus $Ax = b$ und $Ay = b$ für die Differenz $z = x - y$ dass $Az = 0$. Umgekehrt gilt für jedes z mit $Az = 0$, dass $x = y + z$ die Gleichung $Ay = b$ erfüllt, falls $Ax = b$ gilt. Also ist $z = x - y$ die Differenz von zwei Lösungen.

Demnach ist die Menge der Differenzen identisch zur Lösungsmenge von $Ax = 0$. Dies ist ein Vektorraum.

3. Es seien $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(6)}$ Vektoren im $\mathbb{R}^4$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Diese Vektoren spannen den $\mathbb{R}^4$ auf.

(a) sicher

Nein, es könnten alle Vektoren gleich dem Nullvektor sein.

√ (b) möglicherweise

(c) sicher nicht

Falls die Liste z.B. die Standard-Basisvektoren $(1,0,0,0)^T$, $(0,1,0,0)^T$, $(0,0,1,0)^T$ und $(0,0,0,1)^T$ enthält, dann wird der ganze $\mathbb{R}^4$ aufgespannt.

4. Diese Vektoren sind linear unabhängig.

(a) sicher

Nein. Wären die Vektoren linear unabhängig, so hätte für die Matrix A, welche diese Vektoren als Spalten hat, das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung. Mit dem Gaussalgorithmus sieht man aber, dass ein System mit 4 Gleichungen und 6 Unbekannten in jedem Fall mindestens zwei freie Variablen besitzt.

(b) möglicherweise

Nein. Wären die Vektoren linear unabhängig, so hätte für die Matrix A, welche diese Vektoren als Spalten hat, das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung. Mit dem Gaussalgorithmus sieht man aber, dass ein System mit 4 Gleichungen und 6 Unbekannten in jedem Fall mindestens zwei freie Variablen besitzt.

√ (c) sicher nicht

Richtig. Wären die Vektoren linear unabhängig, so hätte für die Matrix A, welche diese Vektoren als Spalten hat, das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung. Mit dem Gaussalgorithmus sieht man aber, dass ein System mit 4 Gleichungen und 6 Unbekannten in jedem Fall mindestens zwei freie Variablen besitzt.

5. Eine beliebige Auswahl von 4 dieser Vektoren ist eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

(a) sicher

Nein, die Auswahl könnte einen Vektor mehrfach enthalten, oder den Nullvektor enthalten.

√ (b) möglicherweise

Richtig, falls die Auswahl z.B. aus den Standard-Basisvektoren $(1,0,0,0)^T$, $(0,1,0,0)^T$, $(0,0,1,0)^T$ und $(0,0,0,1)^T$ besteht.

(c) sicher nicht

Nein, die Auswahl könnte gerade aus den Standard-Basisvektoren $(1,0,0,0)^T$, $(0,1,0,0)^T$, $(0,0,1,0)^T$ und $(0,0,0,1)^T$ bestehen.

6. Ein Vektor habe bezüglich der Basis $B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ den Koordinatenvektor $(-1,-1)^T$. Der Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis ist ...

(a) $(\frac{1}{2},0)^T$

(b) $(-1,-1)^T$

(c) $(0,-2)^T$

√ (d) $(2,0)^T$

(e) $(1,1)^T$

Wenn Basisvektoren $b^{(1)},...,b^{(n)}$ im $\mathbb{R}^n$ und Koordinatenvektor $(k_1,...,k_n)^T$ eines Vektors k gegeben sind, so bedeutet das, dass $k = k_1 b^{(1)} + ... + k_n b^{(n)}$. Hier sind wir im $\mathbb{R}^2$, und haben als Basis die beiden Vektoren $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ Der Vektor mit Koordinaten $(-1,-1)$ bezüglich dieser Basis ist also $-1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, hat also bezüglich der Standard Basis die Koordinaten $(2,0)$.