D-CHAB **Frühlingssemester 2017**
Grundlagen der Mathematik II **Dr. Marcel Dettling**

Serie 7

1) Kern und Bild
Bestimme Basen von Kern und Bild der linearen Abbildung

$$F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \ , \ F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+t \\ x+y \\ y+z \\ z+t \end{pmatrix}$$

sowie der geschachtelten Abbildung $F^{(2)}(x) = F(F(x))$. Stelle die Abbildungen dazu in der Form $F(x) = Ax$, $F^{(2)}(x) = Bx$ für Matrizen A, B dar.

2) Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme
Die folgenden Mengen sind Teilmengen des $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{lcl} L_1 = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\right\} & , & L_2 = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : xy + z = -1\right\} \\ L_3 = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\right\} & , & L_4 = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2z\right\} \\ L_5 = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^2 : x < y < z\right\} & , & L_6 = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^2 : x = 1, y = 2\right\} \\ L_7 = L_4 \backslash L_3 & , & L_8 = L_4 \cap L_3 \ . \end{array}$$

(a) Entscheide, welche der Teilmengen Unterräume des $\mathbb{R}^3$ sind.
Falls ja gib eine Basis des Unterraums an, ansonsten gib eine kurze Begründung warum die Menge kein Unterraum ist.

(b) Entscheide, welche der Teilmengen Lösungsmengen eines linearen Gleichungssystems sind.
Falls ja drücke die Menge durch Orts- und Richtungsvektoren aus.

Verwende für (b), dass eine Menge Lösungsmenge ist wenn man sie in der Form $L = x^{(0)} + \text{span}\{x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\}$ schreiben kann, wobei $x^{(0)}$ ein Ortsvektor, und $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ Richtungsvektoren sind.

3) Ausgleichsrechnung
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimme Kern und Bild der Matrix A.

(b) Bestimme Kern und Bild der Matrix $A^T \cdot A$.

(c) Berechne die Menge aller optimalen Näherungslösungen für das System $Ax = b$.

(d) Zeige durch Rechnung, dass alle Bilder dieser Menge unter der Abbildung $x \mapsto Ax$ den gleichen Abstand zum Zielvektor b haben. Berechne den Abstand, d.h. der Fehler den man macht wenn man mit der Näherungslösung anstatt einer tatsächlichen Lösung des Systems $Ax = b$ arbeitet.

4) Eine Eigenschaft von orthogonalen Matrizen
Zeige durch Rechnung die folgende kleine Hilfsaussage für eine Matrix A vom Format $n \times n$: wenn A eine orthogonale Matrix ist (also $A^T = A^{-1}$), dann haben Ax und x stets die gleiche Länge. Verwende dazu, dass $\|x\|^2 = x^T \cdot x$ ist, wenn man den Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ als Spaltenvektor nimmt.

5) Multiple Choice
Die Multiple Choice Aufgaben können online auf **echo.ethz.ch** gelöst werden.

Abgabetermin : Am Mittwoch, den 12. April spätestens um 11:00 Uhr.