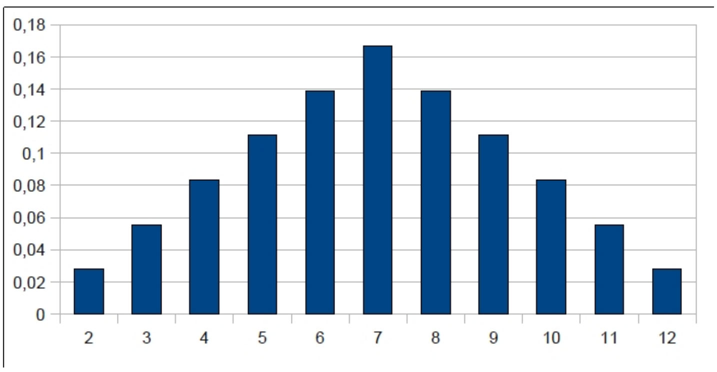
Lösungen 9

1) Zu a): Da nur die Augensumme gezäht wird sind die möglichen Ergebnisse $2, 3, 4, \ldots, 12$, die haben allerdings unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten, weil die Augensumme 3 beispielsweise durch die Würfe $(1, 2)$ und $(2, 1)$ erreicht werden kann, die Summe 2 aber nur durch den einzigen Wurf $(1, 1)$. Jedes Paar (x_1, x_2) hat die gleiche Wahrscheinlichkeit (weil x_1 und x_2 jeweils uniform verteilt sind). Da es $6 \cdot 6 = 36$ mögliche Paare gibt, ist die Einzelwahrscheinlichkeit für jedes Paar $\frac{1}{36} \approx 0.277$. Wir zählen wieviele Paare zu einer gegebenen Augensumme führen:

Wert von Y	Ergebnisse von (X_1, X_2) zu Y	Wahrscheinlichkeit
2 Augen	$(1,1)$	$P(Y=2)=\frac{1}{36}$
3 Augen	$(1,2),(2,1)$	$P(Y=3)=\frac{2}{36}$
4 Augen	$(1,3),(2,2),(3,1)$	$P(Y=4)=\frac{3}{36}$
5 Augen	$(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$	$P(Y=5)=\frac{4}{36}$
6 Augen	$(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$	$P(Y=6)=\frac{5}{36}$
7 Augen	$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$	$P(Y=7)=\frac{6}{36}$
8 Augen	$(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$	$P(Y=8)=\frac{5}{36}$
9 Augen	$(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)$	$P(Y=9)=\frac{4}{36}$
10 Augen	$(4,6),(5,5),(6,4)$	$P(Y=10)=\frac{3}{36}$
11 Augen	$(5,6),(6,5)$	$P(Y=11)=\frac{2}{36}$
12 Augen	$(6,6)$	$P(Y=12)=\frac{1}{36}$

Als Histogramm:



Zu b): Hier müssen wir zuerst die nicht-uniforme Verteilung von X bestimmen, der Anzahl der Augen eines Wurfes mit einem (gefälschten) Würfel. Laut Aufgabe soll sie antiproportional zur Augenzahl sein, also $P(X = k) = c \cdot \frac{1}{k}$ für eine unbekannte Konstante c. Die ist dann aber durch die Normierungsbedingung $P(\text{Alles}) = 1$ festgelegt, wie in in Aufgabe 27 nur dass wir hier mit Summen statt Integralen arbeiten. Die Summe über alle möglichen Ergebnisse des Wurfes ist

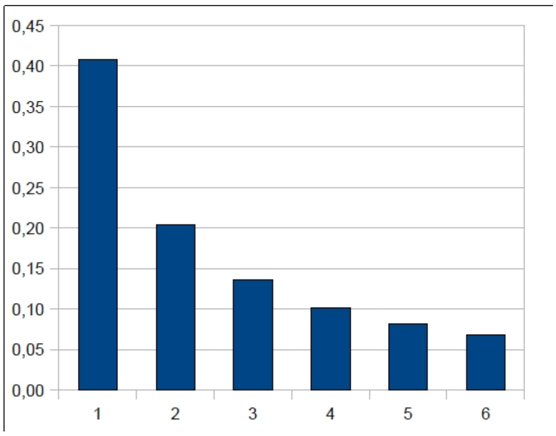
$$P(\text{Alles}) = \sum_{k=1}^{6} P(X = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{c}{k} = c \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$$

$$= c \cdot \frac{60+30+20+15+12+10}{60} = c \cdot \frac{147}{60} = c \cdot 2.45\,.$$

Damit die Gesamtwahrscheinlichkeit Eins ist, müssen wir den Kehrwert $c = \frac{60}{147} \approx 0.408$ einsetzen. Damit steht die Verteilung des gefälschten Würfels fest:

$$P(X=1) = \frac{c}{1} = 0.408\ ,\ P(X=2) = \frac{c}{2} = 0.204\ ,\ P(X=3) = \frac{c}{3} = 0.136\ ,$$
$$P(X=4) = \frac{c}{4} = 0.102\ ,\ P(X=5) = \frac{c}{5} = 0.081\ ,\ P(X=6) = \frac{c}{6} = 0.068\,.$$

Als Histogramm also



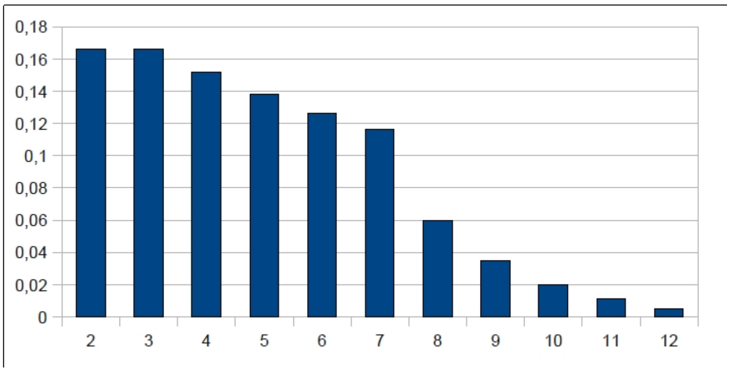
Aus dieser Verteilung berechnen wir wieder die Doppelwurf-Verteilung für Y, jetzt sind aber nicht mehr alle Paare (x_1, x_2) gleichwahrscheinlich, wir müssen die Summen aus Teil (a) weiter auftrennen. Dazu überlegt man sich, dass wegen der Unabhängigkeit der Würfe gelten muss

$$P(\text{Paar } (x_1,x_2) \text{ gewürfelt}) = P(X_1 = x_1 \text{ und } X_2 = x_2) = P(X = x_1) \cdot P(X = x_2)$$
$$= \frac{c}{x_1} \cdot \frac{c}{x_2} = 0.1664 \cdot \frac{1}{x_1 \cdot x_2}\,.$$

Für jede mögliche Augenzahl müssen wir die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten über die Einzelpaare aufaddieren:

Wert von Y	Ergebnisse von (X_1, X_2) zu Y	Wahrscheinlichkeit	
2 Augen	$(1,1)$	$P(Y=2) = c^2 \cdot 1$	$= 0.166$
3 Augen	$(1,2),(2,1)$	$P(Y=3) = c^2 \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$	$= 0.166$
4 Augen	$(1,3),(2,2),(3,1)$	$P(Y=4) = c^2 \cdot (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3})$	$= 0.152$
5 Augen	$(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$	$P(Y=5) = c^2 \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4})$	$= 0.138$
6 Augen	$(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$	$P(Y=6) = c^2 \cdot (\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5})$	$= 0.126$
7 Augen	$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$	$P(Y=7) = c^2 \cdot (\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6})$	$= 0.116$
8 Augen	$(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$	$P(Y=8) = c^2 \cdot (\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12})$	$= 0.060$
9 Augen	$(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)$	$P(Y=9) = c^2 \cdot (\frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{18})$	$= 0.035$
10 Augen	$(4,6),(5,5),(6,4)$	$P(Y=10) = c^2 \cdot (\frac{1}{24} + \frac{1}{25} + \frac{1}{24})$	$= 0.020$
11 Augen	$(5,6),(6,5)$	$P(Y=11) = c^2 \cdot (\frac{1}{30} + \frac{1}{30})$	$= 0.011$
12 Augen	$(6,6)$	$P(Y=12) = c^2 \cdot \frac{1}{36}$	$= 0.005$

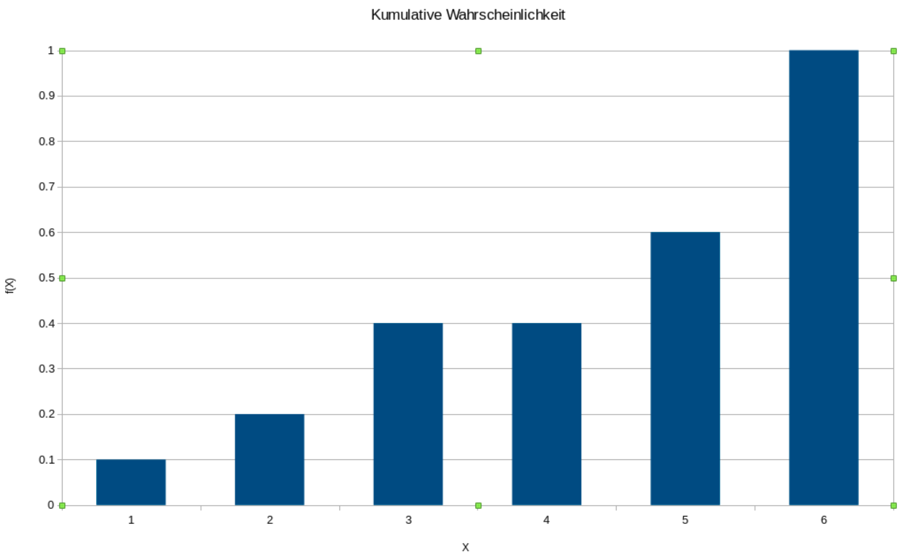
Als Histogramm:



2) (a) Da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten eins sein soll, muss gelten $a+a+2a+2a+4a = 10a = 1$ und somit ist $a- = \frac{1}{10}$.

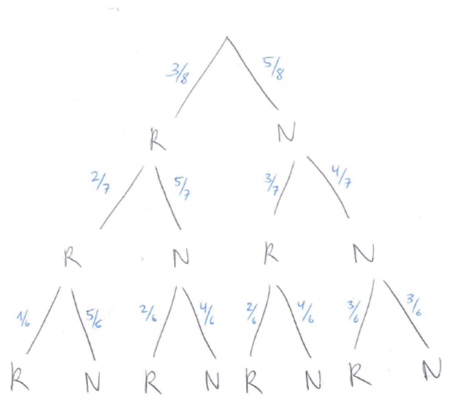
(b) Wie wir aus der Graphik ablesen können ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 1) = a = \frac{1}{10}$.

(c) Es gilt $P(X \leq 4) = P(X \in \{4, 5, 6\}) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 0 + \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{6}{10}$.



(d)

3) Der Wahrscheinlichkeitsbaum kann wie folgt dargestellt werden. “R” steht für “Egon raucht” und “N” steht für “Egon raucht nicht”. Die Zahlen neben den Zweigen des Baumes sind die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten, dass das entsprechende Ereignis eintrifft. Bemerke, dass die Wahrscheinlichkeiten in der zweiten und dritten Pause davon abhängen, ob in den vorherigen Pausen geraucht wurde oder nicht.



Jeder Weg stellt eine mögliche Sequenz von Ereignissen dar. Die Wahrscheinlichkeit einer solchen Sequenz entspricht dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang der Äste des Baumes.

(a) $P(RRR) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6}$.

(b) $P(\text{Egon raucht genau einmal}) = P(RNN) + P(NRN) + P(NNR) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$.

(c) $P(\text{Egon raucht in der dritten Pause}) = P(RRR) + P(NRR) + P(RNR) + P(NNR) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$.