Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2017 – Woche 04

Marcel Dettling

Institute für Datenanalyse und Prozessdesign

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

marcel.dettling@zhaw.ch

http://stat.ethz.ch/~dettling

ETH Zürich, 15. März 2017

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2017 – Woche 04

Matrizen und ihre Bedeutung

Eine $m \times n$- Matrix ist ein Schema von $m \cdot n$ Zahlen, angeordnet in m Zeilen und n Spalten. Die Zahlen nennt man Elemente.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist eine 3x3-Matrix

Matrizen haben ihre Bedeutung zur/zum:

- vereinfachten Schreibweise von LGS
- Beschreibung von linearen Abbildungen
- Lösen von linearen Differentialgleichungssystemen

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2017 – Woche 04

Rechnen mit Matrizen

a) **Addition**

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

b) **skalare Multiplikation**

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

c) **Matrixmultiplikation**

Falksches Schema für die Matrixmultiplikation

$$A\,B = C$$

					2	2	3	
					-2	-1	2	
					3	4	1	$= B$
					-3	4	0	
					1	-3	4	
	2	-1	0	3	-4	-7	29	-12
	3	-2	2	1	0	13	20	7
$A =$	-1	3	-1	-2	-4	-9	-5	-14
	3	3	-4	2	-2	-20	1	3

$= C$

Das Matrixelement c_{32} entsteht aus dem Skalarprodukt der 3. Zeile von A und der 2. Spalte von B:
$(-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot 4 + (-4) \cdot (-3) = -5$

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2017 – Woche 04

Rechenregeln für Matrizen

1) **Kommutativgesetz für die Addition**

Für $m \times n$-Matrizen A und B gilt: $A + B = B + A$

2) **Assoziativgesetz für die Addition**

Für $m \times n$- Matrizen A, B, C gilt: $(A + B) + C = A + (B + C)$

3) **Assoziativgesetz für die Multiplikation**

Für jede $m \times n$-Matrix A, $n \times p$-Matrix B und $p \times q$-Matrix C gilt: $(AB)C = A(BC)$

4) **Distributivgesetze für die Multiplikation**

Für $m \times n$-Matrizen A, B und $n \times p$-Matrizen C, D gilt: $(A + B)C = AC + BC$ sowie $A(C + D) = AC + AD$

Rechenregeln für Matrizen

Wichtig: das Kommutativgesetz bezüglich der Multiplikation gilt für Matrizen in der Regel nicht, d.h. im Allgemeinen ist:

$$AB \neq BA$$

Falls AB existiert, so ist nicht garantiert, dass es auch BA gibt.

Doch selbst für quadratische Matrizen, wo jeweils sowohl AB wie auch BA existiert, kann $AB \neq BA$ sein. Der andere Fall, d.h. $AB = BA$ ist jedoch ebenfalls möglich.

→ *siehe die Beispiele an der Wandtafel…*

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2017 – Woche 04

Transponierte Matrizen

Die Transponierte A^T einer beliebigen Matrix A erhält man, indem man die Zeilen von A in die Spalten von A^T einfüllt.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

3) $(AB)^T = B^T A^T$

Die Inverse einer Matrix

- die Inverse ist nur für quadratische Matrizen definiert
- Geometrie: Matrizen definieren lineare Abbildungen. Die Inverse ist die Umkehrabbildung, sie existiert nicht immer
- die Inverse wird mit dem Gauss-Algorithmus bestimmt. Es gilt, n LGS mit identischen Koeffizienten, aber unterschiedlichen rechten Seiten zu lösen.
- die Klasse der Matrizen, für welche die Inverse existiert, wird **regulär** genannt. Falls die Inverse nicht existiert, so heisst die Matrix **singulär**.

Zusammenhang Inverse/LGS

- Es besteht (schon aus der Berechnung der Inversen) ganz offensichtlich ein Zusammenhang zwischen der Existenz der Inversen von A und der Existenz der Lösung des LGS von A.

Satz 2.7:

Die folgenden Aussagen sind äquivalent, d.h. wenn eine davon gilt, so gelten alle anderen auch. Sei A eine $n \times n$ -Matrix.

i) A **ist invertierbar bzw. regulär**
ii) A **hat Rang** n
iii) $Ax = b$ **ist für jede rechte Seite lösbar**
iv) $Ax = 0$ **hat nur die triviale Lösung**

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2017 – Woche 04

Orthogonale Matrizen

- Orthogonale Matrizen beschreiben **längentreue Abbildungen** vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ also z.B. reine Drehungen oder auch reine Spiegelungen.

- Die Spaltenvektoren von A haben Länge 1 und stehen orthogonal zueinander.

- Sie sind wichtig für die Ausgleichsrechnung, das Eigenwert-problem, usw. (...siehe später):

Definition:

Eine $n \times n$-Matrix A heisst orthogonal, falls $A^T A = I_n$.

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2017 – Woche 04

Rechenregeln für orthogonale Matrizen

Definition:

Eine $n \times n$-Matrix A heisst orthogonal, falls $A^T A = I_n$.

Satz 2.8:

Seien A und B orthogonale $n \times n$-Matrizen. Dann gilt:

i) A **ist invertierbar und** $A^{-1} = A^T$

ii) A^{-1} **ist orthogonal**

iii) AB **ist orthogonal**

iv) I_n **ist orthogonal**

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2017 – Woche 04

4. Determinanten

4.1. Eigenschaften und Interpretation

Die Determinante existiert nur für quadratische (n x n)-Matrizen A und ordnet ihnen eine Zahl zu, welche die Eigenschaften in Bezug auf LGS, Inverse, Eigenwerte, etc. charakterisiert.

Schreibweise: $\det(A) = |A|$

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2017 – Woche 04

Geometrische Interpretation

- Die Determinante ist das **Volumen des Spats**, der von den Spaltenvektoren von A im R^n aufgespannt wird.
- Wenn dieses Volumen (und die Det.) 0 ist, so liegen die Spaltenvektoren in einem Unterraum des R^n (z.B. Gerade im R^2, Ebene im R^3, ...)
- Dies hat entsprechende Auswirkungen auf die Lösbarkeit von durch die Matrix A definierte LGS.
- Daraus folgt, dass die Determinante auch die Existenz der Inversen bestimmt. Reguläre Matrizen haben Determinante≠0.