Lösung 1:
Eigenwerte & Eigenvektoren

1. Sei X eine Menge und $f : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to X$ eine sogenannte Klassenfunktion, d.h.

$$\forall Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K}) \forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : f(QAQ^{-1}) = f(A).$$

Dann folgt insbesondere für beliebige $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dass

$$A \text{ und } B \text{ sind ähnlich} \Rightarrow f(A) = f(B).$$

Beispiele von Klassenfunktionen sind die Spur und die Determinante.

1. Es gilt $\mathrm{tr}(A_1) = 1 + 4 - 2 = 3$ und $\mathrm{tr}(A_2) = -4 + 1 + 5 = 2$. Folglich sind A_1 und A_2 nicht ähnlich über $\mathbb{C}$.
2. $B_1 = I_3$ hat die Eigenschaft, dass für alle $Q \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{C})$ gilt $QB_1Q^{-1} = QI_3Q^{-1} = QQ^{-1} = I_3$. Also ist B_1 nur zu sich selber und insbesondere nicht zu B_2 ähnlich über $\mathbb{C}$.
3. $\det(C_1) = 1$ und $\det(C_2) = 20$. Folglich sind C_1 und C_2 nicht ähnlich über $\mathbb{R}$.
4. Man erkennt, dass D_2 mittels Spalten- und Zeilenvertauschung aus D_1 entsteht, also $D_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) D_1 \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Da $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{Q})$ und wegen $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2 = I_2$ sind D_1 und D_2 also ählich über $\mathbb{Q}$.

2. Wir haben

$$\begin{aligned}\mathrm{char}_{A^{-1}}(X) &= \det(A^{-1} - XI_n) = \det\big((XA^{-1})(X^{-1}I_n - A)\big) \\ &= \frac{X^n}{\det(A)} \det(X^{-1}I_n - A) = \frac{(-X)^n}{\det(A)} \mathrm{char}_A(X^{-1})\end{aligned}$$

Bemerkung: Wir werden sehen, dass für $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ alle Eigenwerte von null verschieden sind. Es ist folglich X ein Eigenwert von A genau dann, wenn X^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} ist.

Bitte wenden!

3. Das charakteristische Polynom von D ist

$$\mathrm{char}_D(X) = \det(D - XI_2) = (a - X)(d - X) - bc = X^2 - \mathrm{tr}(D)X + \det(D).$$

Die Frage lautet also, wann besitzt $\mathrm{char}_D(X)$ genau ein, zwei verschiedene oder keine reelle Nullstelle. Wir wissen, dass für die Diskriminante $\Delta := \mathrm{tr}(D)^2 - 4\det(D)$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\Delta = 0 \Leftrightarrow \mathrm{char}_D(X) \text{ hat genau eine reelle Nullstelle}\\
&\Delta > 0 \Leftrightarrow \mathrm{char}_D(X) \text{ hat zwei verschiedene reelle Nullstellen}\\
&\Delta < 0 \Leftrightarrow \mathrm{char}_D(X) \text{ hat keine reelle Nullstelle}
\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\mathrm{tr}(D)^2 = \det(D) \Leftrightarrow \mathrm{char}_D(X) \text{ hat genau eine reelle Nullstelle}\\
&\frac{1}{4}\mathrm{tr}(D)^2 > \det(D) \Leftrightarrow \mathrm{char}_D(X) \text{ hat zwei verschiedene reelle Nullstellen}\\
&\frac{1}{4}\mathrm{tr}(D)^2 < \det(D) \Leftrightarrow \mathrm{char}_D(X) \text{ hat keine reelle Nullstelle}
\end{aligned}$$

4. **a)** Wir wissen, dass A_α genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A_\alpha) \neq 0$. Zur Berechnung entwickeln wir zweimal nach der letzten Spalte und finden

$$\det(A_\alpha) = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = (1+\alpha)(1-\alpha)$$

Folglich ist A_α genau dann invertierbar, wenn $\alpha \notin \{\pm 1\}$.

b) Wir entwickeln wieder zweimal nach der letzten Spalte und erhalten

$$\begin{aligned}
\det(A_\alpha - XI_4) =& (1-X)\det \begin{pmatrix} 1-X & \alpha & 0 \\ \alpha & 1-X & 0 \\ 0 & \alpha & 1-X \end{pmatrix}\\
=& (1-X)^2 \det \begin{pmatrix} 1-X & \alpha \\ \alpha & 1-X \end{pmatrix}\\
=& (X-1)^2\big(X-(1+\alpha)\big)\big(X-(1-\alpha)\big)
\end{aligned}$$

Folglich sind die Eigenwerte von A_α gegeben durch die Menge $\{1, 1+\alpha, 1-\alpha\}$, wobei 1 mit zweifacher Vielfachheit und $1+\alpha$, $1-\alpha$ je mit einfacher Vielfachheit auftauchen. (Falls $\alpha = 0$, taucht 1 mit vierfacher Vielfachheit auf.)

c) Das Produkt der Eigenwerte ist mit Vielfachheiten gegeben ducrh

$$1 \cdot 1 \cdot (1+\alpha) \cdot (1-\alpha) = \det(A_\alpha).$$

Siehe nächstes Blatt!

5. **a)** Es ist $(L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})(0) = 0$, so dass $W_\lambda \neq \emptyset$. Seien $v_1, v_2 \in W_\lambda$ und seien $r_1, r_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so dass $(L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})^{r_i}(v_i) = 0$. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})^{r_1+r_2}(v_1 + \lambda v_2) =& (L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})^{r_1+r_2}(v_1) + \lambda(L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})^{r_1+r_2}(v_2) \\
=& (L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})^{r_2} \underbrace{(L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})^{r_1}(v_1)}_{=0} \\
&+ \lambda(L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})^{r_1} \underbrace{(L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})^{r_2}(v_2)}_{=0} \\
=& (L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})^{r_2}(0) + (L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})^{r_1}(0) = 0
\end{aligned}$$

Also ist $v_1 + \lambda v_2 \in W_\lambda$.

Bemerkung: Anstatt $r_1 + r_2$ hätten wir als Exponenten auch $\max\{r_1, r_2\}$ wählen können. Dann wäre allerdings eine Fallunterscheidung notwendig gewesen.

b) Da A und λI_n kommutieren, gilt der Binomialsatz, i.e.

$$(A - \lambda I_n)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} A^k (-\lambda I_n)^{r-k} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-\lambda)^{r-k} A^k.$$

(Der Beweis ist genau derselbe, wie der Beweis für $\mathbb{C}$ im Analysisskript.) Mittels Induktion zeigt man, dass A^k und B für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ kommutieren. Für $k = 0$ ist dies klar. Sei also $BA^k = A^k B$ gegeben, dann ist $BA^{k+1} = (BA)A^k = A(BA^k) = A(A^k B) = A^{k+1}B$ und somit folgt die Behauptung.

Sei nun $v \in W_\lambda$ und sei $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so dass $(L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})^r(v) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})^r(L_B v) =& L_{(A-\lambda I_n)^r}(L_B v) = (L_{(A-\lambda I_n)^r} \circ L_B)(v) \\
=& (L_{\sum_{k=0}^r \binom{r}{k}(-\lambda)^{r-k}A^k} \circ L_B)(v) = L_{(\sum_{k=0}^r \binom{r}{k}(-\lambda)^{r-k}A^k)B}(v) \\
=& L_{\sum_{k=0}^r \binom{r}{k}(-\lambda)^{r-k}BA^k}(v) = L_{B(\sum_{k=0}^r \binom{r}{k}(-\lambda)^{r-k}A^k)}(v) \\
=& (L_B \circ L_{(A-\lambda I_n)^r})(v) = L_B\big((L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})^r(v)\big) = 0,
\end{aligned}$$

was zeigt, dass $L_B(v) \in W_\lambda$. Da $v \in W_\lambda$ beliebig war, folgt $L_B(W_\lambda) \subset W_\lambda$ wie gewünscht.