Serie 1:
Eigenwerte & Eigenvektoren

1. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Paare von Matrizen über dem angegebenen Körper zueinander ähnlich sind.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ und $A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{C}$.
2. $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{C}$.
3. $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ und $C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$.
4. $D_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$.

2. Drücken Sie für eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ das charakteristische Polynom von A^{-1} in Termen des charakteristischen Polynoms von A aus. Worin besteht der Zusammenhang zwischen Eigenwerten von A und Eigenwerten von A^{-1}.

3. Es sei $D = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Finden Sie Bedingungen an a, b, c, d, so dass die Matrix D

a) zwei verschiedene,

b) genau einen,

c) keinen reellen Eigenwert besitzt.

Bitte wenden!

4. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $A_\alpha \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α invertierbar?

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_α in Abhängigkeit von α.

c) Berechnen Sie $\det A_\alpha$ und vergleichen Sie die Determinante mit dem Produkt der Eigenwerte (inkl. Vielfachheiten).

5. Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und

$$W_\lambda := \{v \in \mathbb{K}^n | \exists r \in \mathbb{N} \cup \{0\} : (L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})^r(v) = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $W_\lambda \subset \mathbb{K}^n$ ein Unterraum ist.

b) Sei $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und nehmen Sie an, dass B mit A kommutiert. Zeigen Sie, dass W_λ invariant ist unter L_B, i.e. $L_B(W_\lambda) \subset W_\lambda$.

Bemerkung: W_λ heisst Hauptraum zum Eigenwert λ (engl: generalized eigenspace) und die Elemente $v \in W_\lambda$ heissen Hauptvektoren (engl: generalized eigenvectors). Diese Begriffe werden später in der Vorlesung eine wichtige Rolle beim Bestimmen der Jordanschen Normalform spielen.

Siehe nächstes Blatt!

6. Online-Abgabe

1. Die Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $AX = b$ für eine quadratische Matrix A und einen Vektor b sei $x = -b$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) b ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A.

(b) b ist ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 von A.

(c) $-b$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A.

(d) b ist kein Eigenvektor von A.

(e) $-b$ ist kein Eigenvektor von A.

(f) Keine der Aussagen ist richtig.

2. Betrachte die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und die Vektoren $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) v_1 ist ein Eigenvektor von A.

(b) v_2 ist ein Eigenvektor von A.

(c) v_1 und v_2 sind beides Eigenvektoren von A.

(d) Weder v_1 noch v_2 ist ein Eigenvektor von A.

3. Es existiert eine quadratische Matrix über $\mathbb{R}$, die keine Eigenvektoren besitzt.

(a) richtig

(b) falsch

Bitte wenden!

4. Je zwei Eigenvektoren der gleichen Matrix sind linear unabhängig.

(a) richtig

(b) falsch

5. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Seien v_1, v_2 verschiedene Eigenvektoren von T, so ist ihre Summe ebenfalls ein Eigenvektor von T.

(a) richtig

(b) falsch

6. Ähnliche Matrizen haben die gleiche Eigenwerte.

(a) richtig

(b) falsch

7. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt für alle $n \geq 1$?

(a) Wenn eine $n \times n$-Matrix nur zu sich selbst ähnlich ist, dann ist sie die Einheitsmatrix.

(b) Die reellen Matrizen $(i \cdot \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ und $((n-i) \cdot \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ sind ähnlich.

(c) Zwei $n \times n$-Matrizen sind ähnlich genau dann, wenn sie dasselbe charakteristische Polynom haben.

(d) Sind zwei $n \times n$-Matrizen A und B ähnlich, dann sind auch A^k und B^k ähnlich für alle $k \geq 0$.

(e) Keine der Aussagen ist richtig.

Siehe nächstes Blatt!

8. Welche der folgenden Endomorphismen von $\mathbb{R}^3$ haben nicht einen Eigenwert gleich 1?

(a) Rotation um die y-Achse mit Winkel $90°$.

(b) Reflexion an der x-Achse.

(c) Streckung um Faktor 2.

(d) Projektion bezüglich yz-Ebene.

(e) Reflexion an der xz-Ebene.

(f) Alle der oben aufgelisteten Endomorphismen haben einen Eigenwert gleich 1.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Freitag, den 24. Februar 09:00 Uhr morgens im Fach Ihrer Assistentin/Ihres Assistenten im HG J 68.

Bitte wenden!

Allgemeine Informationen

Einschreibung in die Übungsgruppen: Die Einschreibung in die Übungsgruppen erfolgt online. Alle unter `http://www.mystudies.ethz.ch` für die Vorlesung eingeschriebenen Studenten erhalten rechtzeitig per Email einen Link für die Übungsgruppeneinschreibung.

Serien: Die Serien müssen sauber und ordentlich auf DIN A4-Blättern verfasst werden. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zusätzlich gibt es **Multiple-Choice-Fragen**, die online unter `https://echo.ethz.ch/` zu beantworten sind.

Musterlösungen: Für jede Serie erhalten Sie nach dem Verstreichen des Abgabetermins Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben. Bitte arbeiten Sie diese sorgfältig durch und vergleichen Sie sie mit Ihrer eigenen Lösung. Dabei auftretende Fragen können Sie im Rahmen des StudyCenters oder in den Übungsstunden stellen.

StudyCenter: Ab der ersten Semesterwoche wird begleitend zu den regulären Übungen ein StudyCenter angeboten. Es werden ausschliesslich Inhalte der Vorlesungen Analysis II, Lineare Algebra II, Physik II sowie Numerische Mathematik I für die Studiengänge Mathematik und Physik behandelt.
HG E 41: Montag 15 - 19 Uhr, Betreuung von 16 - 18 Uhr, sowie Freitag 14-17 Uhr, Betreuung 14:15-16:15 Uhr
Mensa: Mittwoch 15 - 17:30 Uhr, Betreuung 15:30 - 17:30 Uhr.

Koordinator: Manuel Luethi, `manuel.luethi@math.ethz.ch`

Vorlesungshomepage: `http://tinyurl.com/zkv78el`