Lösung 2:
Diagonalisierbarkeit

1. a) Die Eigenwerte von L_A sind die Nullstellen des Polynoms $\det([L_A - XI_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}})$ für eine beliebige Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$. Nach Wahl der Standardbasis ergibt sich

$$\begin{aligned}\det([L_A]_{\mathcal{E}_3} - XI_3) &= \det(A - XI_3)\\ &= \det\begin{pmatrix} 2-X & 1 & 0\\ 0 & -1-X & 3\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\\ &= -(2-X)(1+X)(4-X)\end{aligned}$$

und somit sind die Eigenwerte gegeben durch $\{-1, 2, 4\}$. Da sie alle verschieden sind, ist L_A also diagonalisierbar. Die geometrischen und die algebraischen Vielfachheiten stimmen also alle überein mit Wert gleich 1 und da die Eigenwerte alle verschieden sind, sind die Eigenräume alle eindimensional.

b) Da die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix das Produkt der Diagonaleinträge ist, wissen wir, dass das charakteristische Polynom von T gegeben ist durch

$$\det([T]_{\mathcal{B}} - XI_6) = (2-X)^2(-1-X)(-X)^2(a_{66} - X).$$

Somit sind die Eigenwerte von T gegeben durch $\sigma(T) = \{-1, 0, 2, a_{66}\}$. Wir unterscheiden nun die folgenden vier Fälle:

"$a_{66} \notin \{-1, 0, 2\}$" In diesem Fall besitzt T die vier paarweise verschiedenen Eigenwerte $\{-1, 0, 2, a_{66}\}$. Um die Eigenvektoren und die Eigenräume zu bestimmen, lösen wir wieder das System $([T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_6)x = 0$ für die Eigenwerte $\lambda \in \{-1, 0, 2, a_{66}\}$, denn für jede Lösung $s \in \mathbb{R}^6$ dieses Systems gilt für das eindeutig definierte $v \in V$ mit $s = [v]_{\mathcal{B}}$, dass

$$0 = ([T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_6)s = [T - \lambda I_V]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [(T - \lambda I_V)v]_{\mathcal{B}}$$

Bitte wenden!

und folglich auch $Tv = \lambda v$.

Falls λ ein von a_{66} verschiedener Eigenwert ist, dann können wir den Eigenraum relativ leicht berechnen. Mittels elementarer Zeilenumformungen können wir alle Einträge in der letzten Spalte in der ersten bis fünften Zeile eliminieren, und es reicht, den Kern der resultierenden Diagonalmatrix zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & a_{26} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda & 0 & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-\lambda)x_1 + a_{16}x_6 \\ -\lambda x_2 + a_{26}x_6 \\ -\lambda x_3 + a_{36}x_6 \\ -(1+\lambda)x_4 + a_{46}x_6 \\ (2-\lambda)x_5 + a_{56}x_6 \\ (a_{66}-\lambda)x_6 \end{pmatrix}$$

Aus der letzten Koordinate und der Annahme $\lambda \neq a_{66}$ folgt $x_6 = 0$.

- Falls $\lambda = -1$, dann ist x_4 beliebig und $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$ und folglich
$$E_{-1} = \operatorname{span}\{e_4\}.$$
- Falls $\lambda = 0$, dann sind $x_1 = x_4 = x_5 = 0$ und x_2, x_3 beliebig, sprich
$$E_0 = \operatorname{span}\{e_2, e_3\}.$$
- Falls $\lambda = 2$, dann sind x_1, x_5 beliebig und $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ und folglich
$$E_2 = \operatorname{span}\{e_1, e_5\}.$$

Falls $\lambda = a_{66}$, dann gilt mit $a_{66} \notin \{-1, 0, 2\}$, dass $\operatorname{Rang}\big([T] - \lambda I_6\big) = 5$ und folglich $\operatorname{nullity}(T - \lambda I_V) = 1$, sodass $\dim E_{a_{66}} = 1$.

Insbesondere stimmen die algebraische und die geometrische Multiplizität für alle Eigenwerte überein. Also ist T diagonalisierbar.

"$a_{66} = -1$": Die Eigenräume zu den Eigenwerten 0 und 2 bleiben unverändert und der Eigenraum zum Eigenwert -1 ergibt sich aus obigem Gleichungssystem nach Einsetzen als

$$E_{-1} = \begin{cases} \operatorname{span}\{e_4\} & \text{falls } a_{46} \neq 0 \\ \operatorname{span}\{e_4, (a_{16}, 3a_{26}, 3a_{36}, 0, a_{56}, -3)^T\} & \text{sonst} \end{cases}$$

und folglich ist die geometrische Vielfachheit von -1 gleich der algebraischen Vielfachheit genau dann, wenn $a_{46} = 0$.

"$a_{66} = 0$": Die Eigenräume zu den Eigenwerten -1 und 2 bleiben unverändert und der Eigenraum zum Eigenwert 0 ergibt sich nach Einsetzen als

$$E_0 = \begin{cases} \operatorname{span}\{e_2, e_3\} & \text{falls } a_{26} \neq 0 \text{ oder } a_{36} \neq 0 \\ \operatorname{span}\{e_2, e_3, (a_{16}, 0, 0, -2a_{46}, a_{56}, -2)^T\} & \text{sonst} \end{cases}$$

und folglich ist die geometrische Vielfachheit von 0 gleich der algebraischen Vielfachheit genau dann, wenn $a_{26} = a_{36} = 0$.

Siehe nächstes Blatt!

"$a_{66} = 2$": Die Eigenräume zu den Eigenwerten -1 und 0 bleiben unverändert und der Eigenraum zum Eigenwert 2 ergibt sich nach Einsetzen als

$$E_2 = \begin{cases} \operatorname{span}\{e_1, e_5\} & \text{falls } a_{16} \neq 0 \text{ oder } a_{56} \neq 0 \\ \operatorname{span}\{e_1, e_5, (0, 3a_{26}, 3a_{36}, 2a_{46}, 0, 6)^T\} & \text{sonst} \end{cases}$$

und folglich ist die geometrische Vielfachheit von 2 gleich der algebraischen Vielfachheit genau dann, wenn $a_{16} = a_{56} = 0$.

2. a) Es ist $\det(A - XI_2) = (1-X)(4-X) + 2 = X^2 - 5X + 6$, und das charakteristische Polynom hat somit die Nullstellen $\{\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{25-24})\} = \{2, 3\}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \lambda = 2: \quad & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \lambda = 3: \quad & \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Folglich sind $E_2 = \operatorname{span}\{(1,-1)^T\}$ und $E_3 = \operatorname{span}\{(1,-2)^T\}$.

b) Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \det(B - XI_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-X & 2 & 3 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 2 & -2 & 1-X \end{pmatrix} \\ &= -\,(X^3 - 5X^2 + 2X + 8) \\ &= -\,(X-4)(X-2)(X+1). \end{aligned}$$

Somit hat B die Eigenwerte $\{-1, 2, 4\}$. Da diese alle in $\mathbb{Q}$ liegen, besitzt B eine Basis bestehend aus Eigenvektoren.

Wir lösen wieder das entsprechende Gleichungssystem für $B - \lambda I_3$:

"$\lambda = -1$":

$$\begin{aligned} (B + I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[Z_3 - 2Z_1]{Z_2 - 3Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{-\frac{1}{7}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[Z_1 - 3Z_2]{Z_3 + 8Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

und da elementare Zeilenoperation der Kern der Matrix unverändert lassen, finden wir

$$E_{-1} = \mathbb{Q}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

"$\lambda = 2$": Es ist

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\1 & 0 & 1\\2 & -2 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 3\\2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 - 2Z_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 3\\0 & -2 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

und folglich

$$E_2 = \mathbb{Q}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}.$$

"$\lambda = 4$": Es ist

$$B - 4I_3 = \begin{pmatrix}-2 & 2 & 3\\1 & -2 & 1\\2 & -2 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\-2 & 2 & 3\\2 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\-2 & 2 & 3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 + 2Z_1} \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\0 & -2 & 5\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_1 + Z_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\0 & -2 & 5\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$E_4 = \mathbb{Q}\begin{pmatrix}8\\5\\2\end{pmatrix}.$$

c) Eine lange direkte Berechnung des charakteristischen Polynoms von C liefert

$$\mathrm{char}_C(X) = X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 4X - 4 = (X-1)(X+1)(X-2)^2.$$

Wir lösen wieder die resultierenden linearen Gleichungssysteme.

"$\lambda = -1$": Mittels elementarer Zeilenumformungen erhalten wir

$$C - \lambda I_4 = \begin{pmatrix}-3 & -3 & -1 & -7\\-3 & 0 & -1 & -4\\6 & 4 & 4 & 8\\3 & 3 & 1 & 7\end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4 + Z_1]{\substack{Z_2 - Z_1\\ Z_3 + 2Z_1}} \begin{pmatrix}-3 & -3 & -1 & -7\\0 & 3 & 0 & 3\\0 & -2 & 2 & -6\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\xrightarrow[Z_1+Z_2]{Z_3+Z_2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2-3Z_2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{6}Z_2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3-2Z_2]{Z_1+Z_2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_2\leftrightarrow Z_3]{-\frac{1}{3}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$E_{-1} = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

"$\lambda = 1$": Wir berechnen

$$C - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -2 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2+Z_4]{Z_1+Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_4-3Z_2]{\substack{Z_1-Z_2 \\ Z_3-4Z_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3-2Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_4-3Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3\leftrightarrow Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$E_1 = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

“$\lambda = 2$”: Wir berechnen

$$C - 2I_4 = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -3 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3+Z_1]{Z_4+Z_2} \begin{pmatrix} -6 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_1-2Z_2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2+Z_1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{3}Z_2]{Z_1-3Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$E_2 = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen: Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 2 ist gleich eins, also kleiner als die algebraische Vielfachheit. Es ist also $\dim(E_{-1} + E_1 + E_2) = 3$ und da $\{-1, 1, 2\}$ die Menge der Eigenwerte von C ist, folgt, dass die Matrix C nicht diagonalisierbar ist über $\mathbb{Q}$.

d) Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{char}_D(X) &= (1-X)\big((1-X)^2+1\big) \\ &= (1-X)(X^2-2X+2) \\ &= -(X-1)(X-1-\mathrm{i})(X-1+\mathrm{i}). \end{aligned}$$

Im Folgenden ist $\omega := 1 + \mathrm{i}$. Wir berechnen wieder die Eigenräume.

“$\lambda = 1$”: Wir berechnen

$$D - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$E_1 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

“$\lambda = \omega$”: Wir berechnen

$$D - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 & -1 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 - \mathrm{i}Z_1} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 & -1 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\mathrm{i}Z_3]{\substack{\mathrm{i}Z_1 \\ \mathrm{i}Z_2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 - Z_2]{Z_1 - \mathrm{i}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$E_\omega = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

“$\lambda = \overline{\omega}$”: Wir berechnen

$$D - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & -1 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 + \mathrm{i}Z_1} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & -1 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[-\mathrm{i}Z_3]{\substack{-\mathrm{i}Z_1 \\ -\mathrm{i}Z_2}} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 - Z_2]{Z_1 + \mathrm{i}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$E_{\overline{\omega}} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

e) Wir berechnen das charakteristische Polynom als

$$\mathrm{char}_E(X) = (\cos\varphi - X)^2 + (\sin\varphi)^2 = X^2 - 2(\cos\varphi)X + 1$$

und folglich sind die Eigenwerte gegeben durch $\{e^{\mathrm{i}\varphi}, e^{-\mathrm{i}\varphi}\}$. Wir berücksichtigen separat den Spezialfall $\sin\varphi = 0$. In diesem Falle ist $E = \pm I_2$ und folglich ist die Standardbasis eine Eigenbasis zu Eigenwerten 1 oder -1, abhängig vom Vorzeichen von E. Genauer:

- Falls $E = I_2$, dann ist $E_1 = \mathbb{C}^2$.
- Falls $E = -I_2$, dann ist $E_{-1} = \mathbb{C}^2$.

Sei also nun $\sin\varphi \neq 0$, dann ist $e^{\mathrm{i}\varphi} \neq e^{-\mathrm{i}\varphi}$ und wir erhalten eindimensionale Eigenräume, die wir im Folgenden berechnen.

“$\lambda = e^{\mathrm{i}\varphi}$”: Wir erhalten

$$E - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & -\mathrm{i}\sin\varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 - \mathrm{i}Z_1} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sin\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

und folglich ist

$$E_{e^{\mathrm{i}\varphi}} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

“$\lambda = e^{-\mathrm{i}\varphi}$”: Wir erhalten

$$E - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \mathrm{i}\sin\varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 + \mathrm{i}Z_1} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sin\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$E_{e^{-\mathrm{i}\varphi}} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

3. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion. Im Induktionsschritt werden wir verwenden, dass wir die Form der Begleitmatrix genau kennen, und diese Form lässt sich am einfachsten für Matrizen der Dimension $n \geq 2$ formulieren. Darum beweisen wir die Aussage im Fall $n = 1$ separat.

“$n = 1$”: Falls $n = 1$ und $P = X + a_0$, dann ist $P = (-1)^n \mathrm{char}_{(-a_0)}(X)$.

“$n = 2$”: Falls $n = 2$ und $P = X^2 + a_1 X + a_0$, dann ist

$$P = \det\begin{pmatrix} -X & 1 \\ -a_0 & -a_1 - X \end{pmatrix} = \mathrm{char}_A(X),$$

wobei $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{smallmatrix}\right)$ ist.

“$n \mapsto n+1$”: Angenommen, wir wissen, dass jedes Polynom von Grad n bis auf Multiplikation mit $(-1)^n$ das charakteristische Polynom einer Matrix in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist. Sei $P \in P_{n+1}(\mathbb{K})$. Dann ist $P = XQ + a_0$ mit $a_0 \in \mathbb{K}$ und $Q \in P_n(\mathbb{K})$. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ die Begleitmatrix von Q und nehmen wir an, dass A von der Form im Hinweis ist.

Definiere nun eine neue Matrix $C \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K})$ durch

$$C := \begin{pmatrix} 0 & e_1^T \\ -a_0 e_n & A \end{pmatrix},$$

dann gilt nach Entwicklung nach der ersten Spalte und nach Voraussetzung für A

$$\begin{aligned} \det(C - XI_{n+1}) =& (-X)\det(A - XI_n) \\ &+ (-1)^{n+2}(-a_0)\det\left(I_n - X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}\right) \\ =& (-X)(-1)^n Q + (-1)^{n+1} a_0 \\ =& (-1)^{n+1}(XQ + a_0) = (-1)^{n+1} P \end{aligned}$$

wie gewünscht.

Siehe nächstes Blatt!

Man beachte, dass auch C im Induktionsschritt wieder die für die Induktion verlangte Form aus dem Hinweis hat und folglich gilt die Aussage nach Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

4. **a)** Nach Definition von $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ existieren $v_1, \dots, v_n \in V \setminus \{0\}$, sodass $T(v_i) = \lambda_i v_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Wie in der Vorlesung gezeigt, sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig. Insbesondere sind die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ paarweise verschieden und somit die linear unabhängige Menge $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Also besitzt V eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von T und somit ist T diagonalisierbar.

b) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n = \dim V$ und $T \in \operatorname{End}(V)$ ein diagonalisierbarer Operator. Dann existiert eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $D := [T]_{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist. Nach Definition ist $\operatorname{char}_T(X) = \det\big(D - XI_n\big)$. Da $D - XI_n \in M_{n\times n}\big(P(\mathbb{K})\big)$ eine Diagonalmatrix ist, ist die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge und somit ist

$$\operatorname{char}_T(X) = \prod_{i=1}^{n} (D - XI_n)_{ii} = \prod_{i=1}^{n} (D_{ii} - X)$$

das Produkt von Linearfaktoren.

c) Wir wissen aus der Vorlesung, dass eine Menge von Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig ist. Sei $\{1, \dots, k\} = I \sqcup J$, sodass $v_i = 0$ genau dann gilt, wenn $i \in I$. Dann ist die Menge $\{v_i \mid i \in J\}$ eine Menge von $|J|$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten und nach dem, was in der Vorlesung gezeigt wurde, insbesondere linear unabhängig. Das heisst, es gibt keine nicht-triviale Darstellung der 0 mit Elementen in $\{v_i \mid i \in J\}$. Da aber nach Voraussetzung $0 = \sum_{i\in J} v_i$, muss also J die leere Menge sein und folglich ist $I = \{1, \dots, k\}$. Insbesondere gilt also $v_1 = \dots = v_k = 0$.

d) Wir überlassen es Ihnen, sich zu vergewissern, dass beide Definitionen genau dieselben sind, wenn $|\Lambda| = 2$. Sollte dies nicht ersichtlich sein, verlangen Sie bitte, dass das in Ihrer Übungsstunde diskutiert wird.

Für die Anwendung müssen wir nur zeigen, dass $E_{\lambda_i} \cap \sum_{j\neq i} E_{\lambda_j} = \{0\}$. Sei $v \in E_{\lambda_i} \cap \sum_{j\neq i} E_{\lambda_j}$, dann existieren $\{v_j \mid j \neq i\}$ mit $v_j \in E_{\lambda_j}$, sodass $v = \sum_{j\neq i} v_j$. Da E_{λ_i} ein Unterraum ist, ist auch $v_i := -v$ in E_{λ_i} enthalten, und somit ist

$$0 = v_1 + \dots + v_k.$$

Es folgt unter Verwendung von c), dass $v_1 = \dots = v_k = 0$ gilt, und insbesondere ist $v = -v_i = 0$.

Bitte wenden!

5. **a)** Tatsächlich gilt für $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 - v_2 \in W$, dass

$$T(v_1) + W = \big(T(v_2) + \underbrace{T(v_1 - v_2)}_{\in W}\big) + W = T(v_2) + W.$$

Somit ist $\overline{T}$ wohldefiniert. Die Linearität folgt sofort:

$$\begin{aligned}\overline{T}\big((v_1 + W) + \mu(v_2 + W)\big) =& \overline{T}\big((v_1 + \mu v_2) + W\big)\\ =& T(v_1 + \mu v_2) + W\\ =& \big(T(v_1) + \mu T(v_2)\big) + W\\ =& \big(T(v_1) + W\big) + \mu\big(T(v_2) + W\big)\\ =& \overline{T}(v_1 + W) + \mu\overline{T}(v_2 + W).\end{aligned}$$

Des Weiteren ist $\overline{T}$ diagonalisierbar. Einerseits gilt nämlich: Sei $v \in V$ ein Eigenvektor von T zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\overline{T}(v + W) = T(v) + W = \lambda v + W = \lambda(v + W)$$

nach Definition der Vektorraumstruktur auf V/W. Andererseits ist für eine beliebige Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V die Menge der Nebenklassen $\{v_1 + W, \ldots, v_n + W\}$ ein Erzeugendensystem von V/W und enthält somit eine Basis von V/W. Da V eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von T besitzt, existiert also eine Basis von V/W bestehend aus Eigenvektoren von $\overline{T}$.

b) Sei $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ die Menge der Eigenwerte von T, so dass $\lambda_i \neq \lambda_j$ wann immer $1 \leq i < j \leq k$. Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i},$$

wobei $E_{\lambda_i} = \{v \in V \mid T(v) = \lambda_i v\}$. Wir zeigen nun, dass

$$W = \bigoplus_{i=1}^{k} (W \cap E_{\lambda_i}).$$

Sei $1 \leq i \leq k$, dann gelten $(W \cap E_{\lambda_i}) \subset E_{\lambda_i}$ und $\sum_{j \neq i}(W \cap E_{\lambda_j}) \subset \sum_{j \neq i} E_{\lambda_j}$. Somit gilt also auch $\{0\} = (W \cap E_{\lambda_i}) \bigcap \sum_{j \neq i}(W \cap E_{\lambda_j})$ und die Summe ist tatsächlich eine direkte Summe. Des Weiteren ist klar, dass $\bigoplus_{i=1}^{k}(W \cap E_{\lambda_i}) \subset W$. Wir müssen also nur die umgekehrte Inklusion beweisen. Sei nun $w \in W$ und seien $v_1, \ldots, v_k \in V$, so dass $v_i \in E_{\lambda_i}$ und $w = v_1 + \cdots v_k$, dann ist

$$0 = w + W = (v_1 + \cdots + v_k) + W = (v_1 + W) + \cdots + (v_k + W)$$

Siehe nächstes Blatt!

Jedes von 0 verschiedene Element in $\{v_i + W \mid 1 \leq i \leq k\}$ ist ein Eigenvektor von $\overline{T}$ und für je zwei solche Elemente sind die Eigenwerte verschieden. Nach dem in dieser Serie bewiesenen Lemma aus der Vorlesung gilt also $v_i + W = 0$ für alle $1 \leq i \leq k$. Also gilt $v_i \in W$ für jedes $1 \leq i \leq k$ und somit folgt $w \in \sum_{i=1}^{k}(W \cap E_{\lambda_i})$.

Nun ist aber $T|_{W\cap E_\lambda} = \lambda I_{W\cap E_\lambda}$ und somit diagonalisierbar. Das heisst, $W \cap E_\lambda$ besitzt eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von $T|_{W\cap E_\lambda}$ und somit insbesondere von $T|_W$. Da für jede Familie von Basen $\mathcal{B}_\lambda$ von $W \cap E_\lambda$ die Vereinigung $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda\in\sigma(T)} \mathcal{B}_\lambda$ über die Menge $\sigma(T)$ bestehend aus den Eigenwerten von T eine Basis von W ist, besitzt also W eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von $T|_W$ und somit ist $T|_W$ diagonalisierbar.

c) Im Folgenden ist $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_r\} \subset \mathrm{End}(V)$ eine endliche Familie kommutierender und diagonalisierbarer Operatoren. Wir beweisen die simultane Diagonalisierbarkeit mittels Induktion über $r = |\mathcal{T}|$.

Falls $r = 1$, dann ist $\mathcal{T}$ nach Annahme simultan diagonalisierbar und es ist nichts zu zeigen.

Sei nun $r \geq 2$ und die Aussage richtig für jede kommutierende und diagonalisierbare Familie von höchstens $r - 1$ Operatoren. Nach Annahme ist T_r diagonalisierbar, d.h. es existiert eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V, deren Elemente alles Eigenvektoren von T_r sind, d.h. für alle $1 \leq i \leq n$ existiert ein $\lambda_i \in \mathbb{K}$, so dass $T_r(v_i) = \lambda v_i$. Im Folgenden seien $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ die Eigenwerte von T_r. Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_k},$$

wobei $E_{\lambda_i} = \{v \in V \mid T_r(v) = \lambda_i v\}$.

Man beachte, dass jeder mit T_r kommutierende Operator S den Unterraum E_{λ_i} invariant lässt, das heisst $S(E_{\lambda_i}) \subset E_{\lambda_i}$. Sei nämlich $S \in \mathrm{End}(V)$, so dass $TS = ST$, dann folgt für jedes $v \in E_{\lambda_i}$, dass

$$T(Sv) = (TS)(v) = (ST)(v) = S(Tv) = S(\lambda_i v) = \lambda_i Sv$$

und somit ist $Sv \in E_{\lambda_i}$.

Wir betrachten nun die Familie $\mathcal{T}' = \{T_1, \ldots, T_{r-1}\}$. Da $T_j T_k = T_k T_j$ für alle $1 \leq j < r$, folgt $T_j|_{E_{\lambda_i}} \in \mathrm{End}(E_{\lambda_i})$. Aus Teilaufgabe b) folgt, dass $T_j|_{E_{\lambda_i}}$ diagonalisierbar ist für jedes $1 \leq j < r$. Da die $T_1|_{E_{\lambda_i}}, \ldots, T_{r-1}|_{E_{\lambda_i}}$ kommutieren, sind sie simultan diagonalisierbar und folglich existiert eine Basis von E_{λ_i} bestehend aus Eigenvektoren von $T_1, \ldots, T_{r-1}$. Da jedes Element von E_{λ_i} ein Eigenvektor von T_r ist, erhalten wir eine Basis von E_{λ_i} bestehend aus Eigenvektoren von $T_1, \ldots, T_r$. Unter Verwendung von $V = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$ erhalten wir eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von $T_1, \ldots, T_r$.

d) Im Folgenden sei $n = \dim V$. Wir bemerken zuerst, dass $\operatorname{span}(\mathcal{T}) \subset \operatorname{End}(V)$ ein endlichdimensionaler Unterraum ist, da $\dim \operatorname{End}(V) = n^2$. Insbesondere besitzt $\operatorname{span}(\mathcal{T})$ eine endliche Basis. Nun ist die Abbildung $\operatorname{End}(V) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $T \mapsto [T]_{\mathcal{B}}$ für jede geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V linear und da die Menge der Diagonalmatrizen ein Unterraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist, reicht es zu zeigen, dass eine Basis von $\operatorname{span}(\mathcal{T})$ simultan diagonalisierbar ist. Da aber jede Basis von $\operatorname{span}(\mathcal{T})$ endlich ist, folgt insbesondere, dass es ausreicht, die Behauptung für endliche Teilmengen von $\operatorname{End}(V)$ zu beweisen, was wir schon in Teilaufgabe c) erledigt haben.