

## Serie 3: Satz von Cayley-Hamilton & spezielle Endomorphismen

1. Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

a) Sei  $T \in \text{End}(V)$ . Zeigen Sie, dass die folgenden alle  $T$ -invarianten Unterräume von  $V$  sind:

$$\{0\}, V, \text{Im}(T), \text{Ker}(T), E_\lambda,$$

wobei im letzten Beispiel  $\lambda$  ein Eigenwert von  $T$  sei.

b) Seien  $S, T \in \text{End}(V)$ ,  $\Phi \in \text{Aut}(V) = \{\Psi \in \text{End}(V) \mid \Psi \text{ ist invertierbar}\}$  und nehmen Sie an, es gelte  $T = \Phi S \Phi^{-1}$ . Zeigen Sie, dass ein Unterraum  $W \subset V$  genau dann  $S$ -invariant ist, wenn  $\Phi(W)$  ein  $T$ -invarianter Unterraum ist.

2. Sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Zeigen Sie, dass  $\dim(\text{span}(I_n, A, A^2, \dots)) \leq n$  gilt.

3.  $\heartsuit$ a) Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Sei  $T \in \text{End}(V)$ . Beweisen Sie, dass  $T$  genau dann nilpotent ist, wenn 0 der einzige Eigenwert von  $T$  in  $\mathbb{C}$  ist.

$\heartsuit$ b) Sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen alle 0. Dann ist die Abbildung  $L_A$  nilpotent.

$\heartsuit$ c) Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, sei  $n = \dim(V) < \infty$  und sei  $T \in \text{End}(V)$  nilpotent. Dann ist  $T^n = 0$ .

4. Sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  und sei

$$\text{char}_A(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0.$$

**Bitte wenden!**

- a) Zeigen Sie, dass  $A$  genau dann invertierbar ist, wenn  $a_0 \neq 0$ .
- b) Zeigen Sie, dass für invertierbare  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  gilt:

$$A^{-1} = \left( -\frac{1}{a_0} \right) \left( (-1)^n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_1 I_n \right)$$

- c) Berechnen Sie unter Verwendung der obigen Formel  $A^{-1}$  für eine Matrix  $A \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ . Was können Sie über die Koeffizienten sagen?

5. a) Zeigen Sie, dass die Menge  $\mu_n \subset \mathbb{C}$  der  $n$ -ten Einheitswurzeln, d.h.

$$\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\},$$

eine Gruppe der Ordnung  $|\mu_n| = n$  ist. Zeigen Sie zudem, dass  $\mu_n$  zyklisch ist, d.h. finden Sie einen Erzeuger  $\omega \in \mu_n$  sodass  $\mu_n = \{\omega^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

- b) Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und sei  $T \in \text{End}(V)$ . Wir sagen, dass  $T$  endliche Ordnung hat, falls ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $T^N = I_V$ . Zeigen Sie, dass jeder solche Endomorphismus diagonalisierbar ist.

*Hinweis:* Verwenden Sie wie im Beweis für Involutionen den Erzeuger von  $\mu_N$  um zu zeigen, dass jeder Endomorphismus endlicher Ordnung diagonalisierbar ist.

- \*6. Sei  $G$  eine Gruppe. Eine Abbildung  $\varphi : G \rightarrow \text{Gl}_N(\mathbb{C})$  heisst *Darstellung von  $G$* , wenn für alle  $g, h \in G$  gilt  $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ .<sup>1</sup> Die Darstellung heisst *trivial*, falls  $\varphi(G) = I_N$ .

Im Folgenden sei  $\mathbb{F}_p$  der Körper mit  $p$  Elementen, wobei  $p$  eine ungerade Primzahl ist. Wir betrachten die Gruppe  $G \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{F}_p)$  der  $2 \times 2$ -Matrizen mit Einträgen in  $\mathbb{F}_p$  und mit Determinante gleich 1.

- a) Zeigen Sie, dass für jede Darstellung gilt:

$$\varphi(e) = I_N \text{ und } \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} \quad (g \in G).$$

- b) Betrachten Sie die Abbildung  $\text{sq} : \mathbb{F}_p^\times \rightarrow \mathbb{F}_p^\times$  gegeben durch  $\text{sq}(a) = a^2$  und definieren Sie auf der Menge  $\mathbb{F}_p^\times = \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$  die Äquivalenzrelation  $a \sim b$

<sup>1</sup>Eine Darstellung ist ein Spezialfall eines sogenannten Gruppenhomomorphismus, womit wir – ähnlich wie bei Vektorräumen – eine Abbildung zwischen zwei Gruppen bezeichnen, die die algebraische Struktur erhält.

falls gilt  $\text{sq}(a) = \text{sq}(b)$ . Beweisen Sie, dass jede Äquivalenzklasse genau zwei Elemente enthält und folgern Sie, dass die Anzahl der Quadrate

$$\{b \in \mathbb{F}_p^\times \mid \exists a \in \mathbb{F}_p^\times : b = a^2\}$$

in  $\mathbb{F}_p^\times$  genau  $\frac{p-1}{2}$  beträgt.

c) Wir schreiben

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_p \right\} \text{ und } N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

Zeigen Sie, dass  $U$  und  $N$  zyklische Gruppen sind, und dass jedes  $g \in G$  als Produkt der Form

$$g = n_2 u_2 n_1 u_1$$

mit  $u_1, u_2 \in U$  und  $n_1, n_2 \in N$  geschrieben werden kann.

d) Sei  $\varphi : G \rightarrow \text{Gl}_N(\mathbb{C})$  eine nicht-triviale Darstellung von  $G$ . Zeigen Sie, dass  $N \geq \frac{p-1}{2}$  ist.

*Hinweis:* Betrachten Sie die Elemente  $\varphi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  und beweisen Sie, dass eines dieser beiden Elementen einen nicht-trivialen Eigenwert besitzt. Sei  $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  oder  $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  und sei  $\alpha = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  für ein  $a \in \mathbb{F}_p^\times$ . Berechnen Sie  $\alpha^{-1} u \alpha$ .

**Bitte wenden!**

## 7. Online-Abgabe

1. Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und sei  $T \in \text{End}(V)$ . Dann existiert ein Polynom  $p$  von Grad  $\dim V$  und mit Koeffizienten in  $\mathbb{K}$ , sodass  $p(T)$  die Nullabbildung ist.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Jedes Polynom mit Leitkoeffizient  $(-1)^n$  ist charakteristisches Polynom eines Operators.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Betrachte die lineare Abbildung auf  $\mathbb{R}^2$  gegeben durch  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ . Was sind die invarianten Unterräume von  $L_A$ ?

(a)  $\mathbb{R}^2$  und  $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(b)  $\mathbb{R}^2$  und  $\{0\}$

(c)  $\mathbb{R}^2, \{0\}$  und  $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d)  $\mathbb{R}^2$

4. Sei  $A$  eine  $n \times n$  Matrix mit  $\text{char}_A(X) = X^2 - X - 1$ , dann ist

(a)  $A^{-1}$  existiert nicht.

(b)  $A^{-1}$  existiert aber kann nicht aus diesen Angaben hergeleitet werden.

(c)  $A^{-1} = A + I_n$ .

(d)  $A^{-1} = A - I_n$ .

**Siehe nächstes Blatt!**

5. Betrachte die Abbildung  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (0, x, y)$ . So ist  $T + I_{\mathbb{R}^3}$  eine Nullstelle des Polynoms

- (a)  $p(X) = X$ .
- (b)  $p(X) = X^2$ .
- (c)  $p(X) = X^3$ .
- (d)  $T + I_{\mathbb{R}^3}$  ist nicht eine Nullstelle eines Polynoms aus der obigen Liste.

6. Sei  $A$  eine  $5 \times 5$  obere Dreiecksmatrix mit allen Einträgen auf der Diagonalen gleich 0, so gilt für die Matrix  $I_5 + A$ :

- (a) Sie ist idempotent.
- (b) Sie ist invertierbar.
- (c) Sie ist singulär.
- (d) Sie ist nilpotent.

7. Es gibt  $n \in \mathbb{N}$  und  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ , sodass  $AB$  nilpotent ist, und  $BA$  nicht nilpotent ist.

- (a) richtig
- (b) falsch

**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** Montag, den 13. März in der Übungsstunde oder davor im Fach Ihrer Assistentin/Ihres Assistenten im HG J 68.