

Lösung 4: Reelle innere Produkte, Normen und Gram-Schmidt Orthogonalisierung

1. Seien $v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, v_3^{(i)} \in \mathbb{R}^3$, sodass $\mathcal{B}_i = (v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, v_3^{(i)})$. Der Gram-Schmidt Algorithmus liefert eine orthogonale Basis $\tilde{\mathcal{B}}_i = (w_1^{(i)}, w_2^{(i)}, w_3^{(i)})$ von \mathbb{R}^3 , wobei $w_1^{(i)} = v_1^{(i)}$, $w_2^{(i)} = v_2^{(i)} - \frac{\langle v_2^{(i)}, w_1^{(i)} \rangle}{\|w_1^{(i)}\|^2} w_1^{(i)}$ und $w_3^{(i)} = v_3^{(i)} - \frac{\langle v_3^{(i)}, w_1^{(i)} \rangle}{\|w_1^{(i)}\|^2} w_1^{(i)} - \frac{\langle v_3^{(i)}, w_2^{(i)} \rangle}{\|w_2^{(i)}\|^2} w_2^{(i)}$. Für die gegebenen Beispiele resultiert

a)

$$w_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, w_2^{(1)} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}, w_3^{(1)} = \frac{11}{17} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b)

$$w_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, w_3^{(2)} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -18 \end{pmatrix}$$

2. a) Wir berechnen für induktiv das Integral $I_n := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^n e^{-x} dx$, wobei wir verwenden, dass $x^n e^{-x}$ als Produkt stetiger Funktionen stetig auf \mathbb{R} und somit auf kompakten Intervallen integrierbar ist. Es ist

$$\int_0^b e^{-x} dx = -[e^{-x}]_0^b = -(e^{-b} - 1) = 1 - e^{-b}$$

nach dem Fundamentalsatz der Analysis und folglich ist $I_0 = 1$. Man berechnet mittels partieller Integration für $n \geq 0$, dass

$$\int_0^b x^{n+1} e^{-x} dx = - \int_0^b x^{n+1} (-e^{-x}) dx$$

Bitte wenden!

$$= - \left\{ b^{n+1}e^{-b} - (n+1) \int_0^b x^n e^{-x} dx \right\}.$$

Angenommen wir wissen bereits, dass $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^n e^{-x} dx = n!$, was wir für den Fall $n = 0$ bereits überprüft haben, dann folgt aus der in der Analysisübung bewiesenen Tatsache $\lim_{b \rightarrow \infty} b^a e^{-a} = 0$ für alle $a > 0$, dass

$$I_{n+1} = \lim_{b \rightarrow \infty} (n+1) \int_0^b x^n e^{-x} dx = (n+1)!$$

und somit folgt die Behauptung.

- b)** Wegen der Linearität des Integrals, ist das Integral $\int_0^\infty p(x)e^{-x} dx$ nach Teilaufgabe a) für alle Polynomfunktionen auf \mathbb{R} wohldefiniert, und da das Produkt zweier Polynome ein Polynom ist, ist $\langle p, q \rangle$ wohldefiniert für alle $p, q \in P(\mathbb{R})$. Aus der Linearität des Integrals und da für $p_1, p_2, q \in P(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ punktweise $(p_1 + \lambda p_2)(x)q(x) = p_1(x)q(x) + \lambda p_2(x)q(x)$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} \langle p_1 + \lambda p_2, q \rangle &= \int_0^\infty (p_1 + \lambda p_2)(x)q(x)e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty p_1(x)q(x)e^{-x} + \lambda p_2(x)q(x)e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty p_1(x)q(x)e^{-x} dx + \lambda \int_0^\infty p_2(x)q(x)e^{-x} dx \\ &= \langle p_1, q \rangle + \lambda \langle p_2, q \rangle. \end{aligned}$$

Da $p_1, p_2, q \in P(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig waren, ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linear im ersten Argument.

Da wegen der Kommutativität von \mathbb{R} gilt $p(x)q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x} dx = \int_0^\infty q(x)p(x)e^{-x} dx = \langle q, p \rangle,$$

und da p, q beliebig waren, ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ symmetrisch.

Es bleibt, die Positivität zu beweisen. Wegen der Monotonie der Integration und der Positivität von $p(x)^2 e^{-x}$, folgt $\langle p, p \rangle \geq 0$ für alle $p \in P(\mathbb{R})$ und die Linearität der Integration impliziert, dass $\langle 0, 0 \rangle = 0$ gilt. Sei nun $p \in P(\mathbb{R})$ von 0 verschieden. Dann existiert nach dem Fundamentalsatz der Algebra ein $x_0 \in (0, \infty)$, sodass $p(x_0) \neq 0$. Sei $\sigma := \frac{1}{2}p(x_0)^2 e^{-x_0}$. Da $x \mapsto p(x)^2 e^{-x}$ stetig ist auf \mathbb{R} , existiert ein $\delta > 0$, sodass $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (0, \infty)$ und für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt $p(x)^2 e^{-x} > \sigma$. Wegen der Monotonie des Integrals folgt

$$0 < 2\delta\sigma = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \sigma dx \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} p(x)^2 e^{-x} dx \leq \int_0^\infty p(x)^2 e^{-x} dx = \langle p, p \rangle.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Wir konstruieren die gewünschte *Orthonormalbasis* per Induktion. Sei $p \in P_0(\mathbb{R})$, dann existiert $a_0 \in \mathbb{R}$, sodass $p(x) = a_0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und folglich ist $\langle p, p \rangle = a_0^2 \int_0^\infty e^{-x} dx = a_0^2$ und aus $\langle p, p \rangle = 1$ folgt $a_0 \in \{\pm 1\}$. Schliesslich impliziert die Bedingung für den Leitkoeffizienten, dass $a_0 = 1$, so dass p durch die Anforderungen $\deg(p) = 0$ und $\langle p, p \rangle = 1$ vollständig bestimmt ist.

Angenommen, wir wissen bereits, dass eindeutig bestimmte $p_0, \dots, p_n \in P(\mathbb{R})$ existieren, sodass $\deg(p_k) = k$ sowie $\langle p_k, p_l \rangle = \delta_{kl}$ für $0 \leq k, l \leq n$ und sodass der Leitkoeffizient positiv ist. Dann sind p_0, \dots, p_n linear unabhängig und bilden folglich eine Basis von $P_n(\mathbb{R}) \subset P_{n+1}(\mathbb{R})$. Angenommen, $p \in P(\mathbb{R})$ hat die Eigenschaft, dass $\deg(p) = n + 1$, dann ist $\{p_0, \dots, p_n, p\}$ eine Basis von $P_{n+1}(\mathbb{R})$. Dank dem Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren existiert ein $p_{n+1} \in P_{n+1}(\mathbb{R})$, sodass p_0, \dots, p_{n+1} eine Orthonormalbasis von $P_{n+1}(\mathbb{R})$ ist, und wegen

$$\deg\left(\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k p_k\right) \leq \max\{\deg(p_k) \mid 0 \leq k \leq n+1\}$$

folgt $\deg(p_{n+1}) = n + 1$, da ansonsten $\{p_0, \dots, p_{n+1}\}$ kein Erzeugendensystem von $P_{n+1}(\mathbb{R})$ sein kann. Wir müssen also nur zeigen, dass p_{n+1} durch p_0, \dots, p_n bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmt ist. Sei $q \in P_{n+1}(\mathbb{R})$ ein weiteres Polynom mit $\deg(q) = n + 1$, sodass p_0, \dots, p_n, q eine Orthonormalbasis von $P_{n+1}(\mathbb{R})$ ist. Da p_0, \dots, p_{n+1} eine Basis ist, ist

$$q = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k p_k$$

für Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$. Es gilt nach Annahme für $0 \leq l \leq n$, dass

$$0 = \langle q, p_l \rangle = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k \langle p_k, p_l \rangle = \alpha_l$$

und folglich ist also $q = \alpha_{n+1} p_{n+1}$. Nach Voraussetzung ist

$$1 = \langle q, q \rangle = \alpha_{n+1}^2 \langle p_{n+1}, p_{n+1} \rangle = \alpha_{n+1}^2$$

und folglich ist $\alpha_{n+1} \in \{\pm 1\}$. Dies zeigt, dass p_{n+1} bis auf Vorzeichen eindeutig durch p_0, \dots, p_n bestimmt ist.

Die Existenz und die Eindeutigkeit der gewünschten orthonormalen Menge folgt nun per Induktion. Die Menge $\{p_n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ ist ein Erzeugendensystem und die Darstellung eines Polynoms als Linearkombination ist eindeutig, denn jedes beliebige Polynom $q \in P(\mathbb{R})$ ist Element von $P_n(\mathbb{R})$ für genügend grosse $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für jedes solche n existiert eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von Elementen in $\{p_0, \dots, p_n\}$, da letztere Menge eine Basis von

Bitte wenden!

$P_n(\mathbb{R})$ ist. Insbesondere ist die Linearkombination nicht von n abhängig, da jede Linearkombination von Elementen in $\{p_0, \dots, p_n\}$ auch eine Linearkombination von Elementen in $\{p_0, \dots, p_{n+k}\}$ für $k \in \mathbb{N}$ ist.

- d) Wir haben in Teilaufgabe c) bereits $p_0 = 1$ bestimmt. Wir wenden nun das Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren für die Monombasis $\{1, X, X^2\}$ an, was – wie oben gezeigt – nach Normalisierung und Korrektur des Vorzeichens die gewünschte Orthonormalbasis liefert. Wir verwenden Teilaufgabe a) und erhalten:

$$\langle X, 1 \rangle = 1 \Rightarrow p_1 = X - 1,$$

denn

$$\langle X - 1, X - 1 \rangle = \langle X, X \rangle - 2\langle X, 1 \rangle + \langle 1, 1 \rangle = 2 - 2 + 1.$$

Für die Berechnung haben wir verwendet, dass nach Teilaufgabe a) für beliebige $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt $\langle X^n, X^m \rangle = \langle X^{n+m}, 1 \rangle = (n + m)!$.

Ähnlich finden wir

$$\langle X^2, 1 \rangle = 2 \text{ und } \langle X^2, X - 1 \rangle = \langle X^3, 1 \rangle - \langle X^2, 1 \rangle = 4.$$

Folglich ist

$$p_2 = \frac{1}{2}(X^2 - 4(X - 1) - 2) = \frac{1}{2}(X^2 - 4X + 2),$$

denn

$$\begin{aligned} \|X^2 - 4X + 2\|^2 &= \int_0^\infty (x^2 - 4x + 2)^2 e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty (x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 4) e^{-x} dx \\ &= 4! - 8 * 3! + 20 * 2! - 16 * 1! + 4 * 0! = 4. \end{aligned}$$

3. Dies ist eine Version der Cauchy-Schwarz Ungleichung. Wir wissen aus der Analysis, dass für stetige φ, ψ, g von $[a, b]$ nach \mathbb{R} das Integral

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_a^b \varphi(x)\psi(x)g(x)dx$$

wohldefiniert ist, und dass für stetige $\varphi_1, \varphi_2, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle \varphi_1 + \lambda\varphi_2, \psi \rangle = \langle \varphi_1, \psi \rangle + \lambda\langle \varphi_2, \psi \rangle$$

wegen der Linearität der Integration. Zudem gilt für $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die Gleichung $\varphi(x)\psi(x) = \psi(x)\varphi(x)$ punktweise für $x \in [a, b]$, und folglich ist für stetige φ, ψ

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle.$$

Siehe nächstes Blatt!

Da die Abbildung g durchaus 0 sein kann, erfüllt die Abbildung $(\varphi, \psi) \mapsto \langle \varphi, \psi \rangle$ nur $\langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$ für alle stetigen $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, aber wir können aus $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$ nicht schliessen, dass φ überall verschwindet. Eine solches *semidefinites* inneres Produkt, also eine Abbildung $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$, mit den Eigenschaften

1. $\forall v_1, v_2, w \in V \forall \lambda \in \mathbb{R} : \langle v_1 + \lambda v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \lambda \langle v_2, w \rangle$,
2. $\forall v, w \in V : \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$,
3. $\forall v \in V : \langle v, v \rangle \geq 0$,

erfüllt ebenfalls die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle.$$

Sei nämlich $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig, dann ist

$$0 \leq \langle \lambda v + w, \lambda v + w \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle + 2\lambda \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom, das nur positive Werte annimmt. Insbesondere besitzt es höchstens eine reelle Nullstelle und somit ist die Diskriminante nicht-positiv. Das heisst:

$$0 \geq 4\langle v, w \rangle^2 - 4\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$$

wie gewünscht.

4. a) Es ist per definitionem

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle \end{aligned}$$

und folglich gilt $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ genau dann, wenn $\langle v, w \rangle = 0$.

Der Satz von Pythagoras lautet: Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ zueinander senkrecht, dann ist $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$. Da v, w genau dann zueinander senkrecht stehen, wenn das standard innere Produkt zwischen v und w verschwindet, folgt der Satz von Pythagoras sofort aus dem, was wir eben gezeigt haben.

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle + \langle v - w, v - w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &\quad + \langle v, v \rangle - 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2. \end{aligned}$$

Die Bedeutung der Parallelogrammgleichung ergibt sich am besten anhand eines Bildes (siehe Abbildung 1).

Bitte wenden!

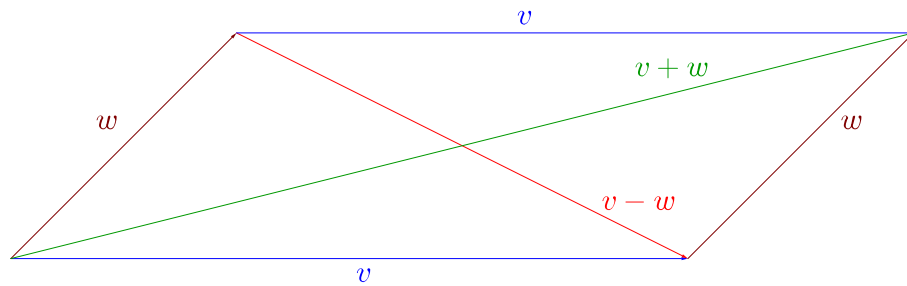


Abbildung 1 – Eine Illustration der Parallelogrammgleichung. In \mathbb{R}^2 folgt die Parallelogrammgleichung beispielsweise aus dem Kosinussatz.

- c) Wir haben bereits in Teilaufgabe b) gezeigt, dass die Parallelogrammgleichung gilt, wenn die Norm durch ein inneres Produkt induziert ist. D.h. insbesondere, dass es ausreicht zu zeigen, dass jede Norm, die die Parallelogrammgleichung erfüllt, ein inneres Produkt induziert. Sei also eine solche Norm gegeben. Wir definieren wie im Hinweis

$$\langle v, w \rangle := \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2).$$

Es gilt

$$\langle v, v \rangle = \frac{1}{4}(\|2v\|^2 - \|0\|^2) = \|v\|^2$$

und folglich ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv. Die Symmetrie folgt sofort, da $\|v + w\| = \|w + v\|$ sowie $\|v - w\| = \|w - v\|$. Wir müssen also nur beweisen, dass die Abbildung im ersten Argument linear ist. Hierfür befolgen wir die Schritte aus dem Hinweis.

- i) Es ist nach Definition

$$\langle 0, w \rangle = \frac{1}{4}(\|0 + w\|^2 - \|0 - w\|^2) = \frac{1}{4}(\|w\|^2 - (-1)^2\|w\|^2) = 0.$$

- ii) Hier verwenden wir die Parallelogrammgleichung und erhalten

$$\begin{aligned} 4\langle v_1 + v_2, w \rangle + 4\langle v_1 - v_2, w \rangle &= \|v_1 + v_2 + w\|^2 - \|v_1 + v_2 - w\|^2 \\ &\quad + \|v_1 - v_2 + w\|^2 - \|v_1 - v_2 - w\|^2 \\ &= -\|v_1 - v_2 + w\|^2 + 2\|v_1 + w\|^2 + 2\|-v_2\|^2 \\ &\quad + \|v_1 - v_2 - w\|^2 - 2\|v_1 - w\|^2 - 2\|-v_2\|^2 \\ &\quad + \|v_1 - v_2 + w\|^2 - \|v_1 - v_2 - w\|^2 \\ &= 2(\|v_1 + w\|^2 - \|v_1 - w\|^2) \\ &= 8\langle v_1, w \rangle. \end{aligned}$$

Nach Division beider Seiten durch 4 folgt die Behauptung.

Siehe nächstes Blatt!

Wir bemerken die folgenden Spezialfälle:

$$\begin{aligned}v_1 = v_2 &\Rightarrow \langle 2v_1, w \rangle = 2\langle v_1, w \rangle, \\v_1 = 0 &\Rightarrow \langle -v_2, w \rangle = -\langle v_2, w \rangle.\end{aligned}$$

iii) Wir berechnen

$$\begin{aligned}2\langle v_1, w \rangle + 2\langle v_2, w \rangle &= \langle v_1 + v_2, w \rangle + \langle v_1 - v_2, w \rangle \\&\quad + \langle v_2 + v_1, w \rangle + \langle v_2 - v_1, w \rangle \\&= \langle v_1 + v_2, w \rangle + \langle v_1 - v_2, w \rangle \\&\quad + \langle v_1 + v_2, w \rangle + \langle -(v_1 - v_2), w \rangle \\&= 2\langle v_1 + v_2, w \rangle\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt nach Division durch 2.

iv) Sei zuerst $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen, dass die Aussage für $n = 1, 2$ wahr ist. Wir beweisen die Aussage per Induktion. Angenommen $n > 2$ und sei die Aussage wahr für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < n$.

Falls $2 \mid n$ gilt, dann existiert $k \in \mathbb{N}$, sodass $n = 2k$ und es ist $1 \leq k < n$. Folglich gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\langle nv, w \rangle = \langle 2(kv), w \rangle = 2\langle kv, w \rangle = (2k)\langle v, w \rangle = n\langle v, w \rangle$$

und die Behauptung ist für n bewiesen.

Falls $2 \nmid n$, dann gilt $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k + 1 < n$. Es folgt aus Teil (ii), sowie der Induktionsvoraussetzung, dass

$$\begin{aligned}(n + 1)\langle v, w \rangle &= 2\langle (k + 1)v, w \rangle \\&= \langle (k + 1)v + kv, w \rangle + \langle (k + 1)v - kv, w \rangle \\&= \langle nv, w \rangle + \langle v, w \rangle\end{aligned}$$

und es folgt $n\langle v, w \rangle = \langle nv, w \rangle$.

Sei nun $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, und sei $n \neq 0$, da letzterer Fall bereits in (i) behandelt wurde. Dann ist $n = -m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und folglich ist wegen der Bemerkung in (ii) und der Diskussion des Spezialfalls $n \in \mathbb{N}$

$$\langle nv, w \rangle = \langle -mv, w \rangle = -\langle mv, w \rangle = -m\langle v, w \rangle = n\langle v, w \rangle.$$

v) Wegen dem eben gezeigten, gilt

$$n\langle \frac{1}{n}v, w \rangle = \langle n\frac{1}{n}v, w \rangle = \langle v, w \rangle.$$

vi) Sei $r = \frac{n}{m}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$, dann gilt wegen (iv) und (v)

$$r\langle v, w \rangle = n\left(\frac{1}{m}\langle v, w \rangle\right) = n\langle \frac{1}{m}v, w \rangle = \langle n\left(\frac{1}{m}v\right), w \rangle = \langle rv, w \rangle.$$

Bitte wenden!

vii) Es ist nach Definition und unter Verwendung der Parallelogramm- und der Dreiecksungleichungen

$$\begin{aligned} 4|\langle v, w \rangle| &= \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 \\ &= 2\|v + w\|^2 - 2\|v\|^2 - 2\|w\|^2 \\ &\leq 2(\|v\| + \|w\|)^2 - 2\|v\|^2 - 2\|w\|^2 = 4\|v\|\|w\| \end{aligned}$$

und die gewünschte Aussage folgt nach Division durch 4.

viii) Es gilt

$$\begin{aligned} |\lambda\langle v, w \rangle - \langle \lambda v, w \rangle| &\stackrel{(vi)}{=} |\lambda\langle v, w \rangle - r\langle v, w \rangle + \langle rv, w \rangle - \langle \lambda v, w \rangle| \\ &\stackrel{(iii)}{=} |(\lambda - r)\langle v, w \rangle - \langle (\lambda - r)v, w \rangle| \\ &\leq |(\lambda - r)\langle v, w \rangle| + |\langle (\lambda - r)v, w \rangle| \\ &\stackrel{(vii)}{\leq} |\lambda - r|\|v\|\|w\| + \|(\lambda - r)v\|\|w\| \\ &= 2|\lambda - r|\|v\|\|w\|. \end{aligned}$$

ix) Wir wissen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ symmetrisch und positiv ist, und wir haben bereits gezeigt, dass für alle $w \in V$ die Abbildung $v \mapsto \langle v, w \rangle$ additiv ist. Wir müssen also nur noch zeigen, dass für alle $v, w \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda\langle v, w \rangle$. Seien $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht ist, existiert ein $r \in \{Q\}$, sodass $0 \leq 2|\lambda - r|\|v\|\|w\| < \varepsilon$. Insbesondere ist also nach (viii)

$$|\lambda\langle v, w \rangle - \langle \lambda v, w \rangle| \leq 2|\lambda - r|\|v\|\|w\| < \varepsilon.$$

Da ε beliebig war, folgt $|\lambda\langle v, w \rangle - \langle \lambda v, w \rangle| = 0$ und folglich ist

$$\lambda\langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle.$$

Da $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$ beliebig waren, folgt die Linearität in der ersten Komponente und somit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt.

Es wurde bereits für die Positivität gezeigt, dass $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$, und somit ist $\|\cdot\|$ durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert.

5. a) Angenommen T sei nicht injektiv. Dann ist $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$ und folglich existiert $v \in V \setminus \{0\}$, sodass $T(v) = 0$. Also ist

$$0 = \|0\| = \|T(v)\| = \|v\|.$$

Da $\|\cdot\|$ eine Norm ist, ist das absurd.

Siehe nächstes Blatt!

- b) Wegen Linearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und von T ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ linear im ersten Argument und sicherlich ist $\langle 0, 0 \rangle_T = \langle T(0), T(0) \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 0$. Analog folgern wir Symmetrie: $\langle v, w \rangle_T = \langle T(v), T(w) \rangle = \langle T(w), T(v) \rangle = \langle w, v \rangle_T$. Wir müssen also zeigen: $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ ist genau dann positiv definit, wenn T injektiv ist.

Angenommen T ist injektiv, dann ist $T(v) \neq 0$ wann immer $v \in V \setminus \{0\}$, und folglich gilt für solche v

$$\langle v, v \rangle_T = \langle T(v), T(v) \rangle > 0,$$

wegen der Positivität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Angenommen T ist nicht injektiv, dann existiert ein $v \in V \setminus \{0\}$, sodass $T(v) = 0$, und folglich ist $\langle v, v \rangle_T = \langle T(v), T(v) \rangle = 0$, also ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ nicht positiv definit. Mittels Kontraposition folgt also die Injektivität von T aus der Positivität von $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$.

- c) Zuerst müssen wir zeigen, dass $(\cdot, \cdot)_T$ wohldefiniert ist. Angenommen $v' - v, w' - w \in \text{Ker}(T)$, dann ist

$$\begin{aligned} \langle T(v'), T(w') \rangle &= \underbrace{\langle T(v' - v), T(w') \rangle}_{=0} + \langle T(v), T(w') \rangle \\ &= \langle T(v), \underbrace{T(w' - w)}_{=0} \rangle + \langle T(v), T(w) \rangle \\ &= \langle T(v), T(w) \rangle \end{aligned}$$

und somit ist $(v + \text{Ker}(T), w + \text{Ker}(T))_T$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten und also wohldefiniert. Wir haben bereits zuvor argumentiert, dass die Abbildung $(v, w) \mapsto \langle T(v), T(w) \rangle$ symmetrisch, positiv semidefinit und im ersten Argument linear ist, und somit folgen diese Eigenschaften auch für $(\cdot, \cdot)_T$ nach Definition der Vektorraumstruktur auf $V/\text{Ker}(T)$. Es bleibt also nur zu zeigen, dass aus $(v + \text{Ker}(T), v + \text{Ker}(T))_T = 0$ auch $v \in \text{Ker}(T)$ folgt. Allerdings ist

$$0 = (v + \text{Ker}(T), v + \text{Ker}(T))_T = \langle T(v), T(v) \rangle$$

und also $T(v) = 0$ wegen der Positivität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

6. a) Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung $\Phi : V \rightarrow V^*, v \mapsto \Phi_v$, wohldefiniert ist, d.h. wir müssen zeigen, dass $\Phi_v \in V^*$ für alle $v \in V$. Dies folgt aber sofort aus der Linearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im ersten Argument. Seien nämlich $w_1, w_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\Phi_v(w_1 + \lambda w_2) = \langle w_1 + \lambda w_2, v \rangle = \langle w_1, v \rangle + \lambda \langle w_2, v \rangle = \Phi_v(w_1) + \lambda \Phi_v(w_2).$$

Bitte wenden!

Als nächstes überprüfen wir, dass Φ linear ist, d.h. dass für alle $v_1, v_2 \in V$, für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\Phi_{v_1 + \lambda v_2} = \Phi_{v_1} + \lambda \Phi_{v_2}$. Hierfür reicht es zu zeigen, dass für alle $w \in V$ gilt:

$$\Phi_{v_1 + \lambda v_2}(w) = \Phi_{v_1}(w) + \lambda \Phi_{v_2}(w),$$

in welchem Falle die Abbildungen punktweise übereinstimmen und somit identisch sind.

Wegen der Linearität und der Symmetrie von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi_{v_1 + \lambda v_2}(w) &= \langle w, v_1 + \lambda v_2 \rangle = \langle v_1 + \lambda v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \lambda \langle v_2, w \rangle \\ &= \langle w, v_1 \rangle + \lambda \langle w, v_2 \rangle = \Phi_{v_1}(w) + \lambda \Phi_{v_2}(w) \end{aligned}$$

wie gewünscht.

Wegen $\dim(V) = \dim(V^*)$ reicht es zu zeigen, dass Φ injektiv ist. Sei $v \in \text{Ker}(\Phi)$, d.h. $\Phi_v = 0$ bzw. $\Phi_v(w) = 0$ für alle $w \in V$. Dann ist insbesondere $\Phi_v(v) = 0$ und somit

$$0 = \Phi_v(v) = \langle v, v \rangle.$$

Aus der Positivität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ folgt $v = 0$ und also die Injektivität.

- b)** Wir zeigen zuerst, dass für alle $w \in V$ die Abbildung $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle f(x), w \rangle$ stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und sei $w \in V$. Wenn $w = 0$, dann ist die Abbildung die konstante Nullabbildung und es ist nichts zu zeigen. Sei also $w \neq 0$ und insbesondere $\|w\| \neq 0$. Da f nach Annahme stetig ist, existiert für alle $x_0 \in [a, b]$ ein $\delta > 0$, sodass gilt:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{\|w\|},$$

und nach Anwendung von Cauchy-Schwarz folgt für solche x :

$$|\langle f(x), w \rangle - \langle f(x_0), w \rangle| = |\langle f(x) - f(x_0), w \rangle| \leq \|f(x) - f(x_0)\| \|w\| < \varepsilon.$$

Insbesondere ist für alle $w \in V$ das Integral

$$I_f(w) := \int_a^b \langle f(x), w \rangle dx$$

wohldefiniert. Beachte, dass für beliebige $w_1, w_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} I_f(w_1 + \lambda w_2) &= \int_a^b \langle f(x), w_1 + \lambda w_2 \rangle dx \\ &= \int_a^b \langle f(x), w_1 \rangle + \lambda \int_a^b \langle f(x), w_2 \rangle dx \\ &= I_f(w_1) + \lambda I_f(w_2). \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Folglich ist $I_f(\cdot) \in V^*$, und nach Teilaufgabe a) existiert ein eindeutig bestimmtes Element $\int_a^b f(x)dx = \Phi^{-1}(I_f) \in V$ mit den gewünschten Eigenschaften. Die Abbildung ist also wohldefiniert.

Wir berechnen punktweise

$$\begin{aligned} I_{f_1 + \lambda f_2}(w) &= \int_a^b \langle (f_1 + \lambda f_2)(x), w \rangle dx \\ &= \int_a^b \langle f_1(x), w \rangle + \lambda \langle f_2(x), w \rangle dx \\ &= I_{f_1}(w) + \lambda I_{f_2}(w), \end{aligned}$$

und folglich ist die Abbildung $I : C([a, b], V) \rightarrow V^*$, $f \mapsto I_f$, linear und insbesondere folgt die Linearität der Komposition $\Phi^{-1} \circ I : f \mapsto \int_a^b f(x)dx$.

- c) Wir zeigen zuerst, dass für alle $v, w \in V$ die Abbildung $x \in [a, b] \mapsto \langle F(x)(v), w \rangle$ stetig ist. Wenn $w = 0$, dann ist die Abbildung die konstante Nullabbildung und Stetigkeit ist klar. Sei also $w \neq 0$ und seien $x_0 \in [a, b]$ sowie $\varepsilon > 0$ beliebig. Da F_v nach Voraussetzung stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass gilt

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] \Rightarrow \|F(x)(v) - F(x_0)(v)\| < \frac{\varepsilon}{\|w\|}.$$

Unter Verwendung von Cauchy-Schwarz folgt also

$$|\langle F(x)(v), w \rangle - \langle F(x_0)(v), w \rangle| \leq \|F(x)(v) - F(x_0)(v)\| \|w\| < \varepsilon,$$

was die Stetigkeit beweist, da x_0 und ε beliebig waren. Insbesondere ist also für alle $v, w \in V$ das Integral

$$I_F(v, w) := \int_a^b \langle F(x)(v), w \rangle dx$$

wohldefiniert. Wegen der Linearität und der Symmetrie von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ folgt für alle $w_1, w_2 \in V$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} I_F(v, w_1 + \lambda w_2) &= \int_a^b \langle F(x)(v), w_1 + \lambda w_2 \rangle dx \\ &= I_F(v, w_1) + \lambda I_F(v, w_2). \end{aligned}$$

Nach Teilaufgabe a) existiert also ein eindeutiges $\int_a^b F(x)(v) \in V$, sodass für alle $w \in V$ gilt

$$I_F(v, w) = \left\langle \int_a^b F(x)(v) dx, w \right\rangle.$$

Bitte wenden!

Andererseits gilt wegen der Linearität von $F(x)$ und von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für $v_1, v_2, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch

$$\begin{aligned} I_F(v_1 + \lambda v_2, w) &= \int_a^b \langle F(x)(v_1 + \lambda v_2), w \rangle dx \\ &= \int_a^b \langle F(x)(v_1), w \rangle + \lambda \langle F(x)(v_2), w \rangle dx \\ &= I_F(v_1, w) + \lambda I_F(v_2, w). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt also

$$\left\langle \int_a^b F(x)(v_1 + \lambda v_2) dx, w \right\rangle = \left\langle \int_a^b F(x)(v_1) dx, w \right\rangle + \left\langle \lambda \int_a^b F(x)(v_2) dx, w \right\rangle$$

und wegen Teilaufgabe a) folgt

$$\int_a^b F(x)(v_1 + \lambda v_2) dx = \int_a^b F(x)(v_1) dx + \lambda \int_a^b F(x)(v_2) dx,$$

sodass die Abbildung $\int_a^b F(x) dx : V \rightarrow V$ definiert durch

$$\left(\int_a^b F(x) dx \right) (v) := \int_a^b F(x)(v) dx$$

linear ist. Diese Abbildung hat nach Konstruktion die gewünschten Eigenschaften.