Serie 4:
Reelle innere Produkte, Normen und Gram-Schmidt Orthogonalisierung

1. Betrachten Sie den Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem üblichen inneren Produkt gegeben durch $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ (mit $1 \leq i, j \leq 3$ und $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$). Verwenden Sie das Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren um aus mindestens einer der folgenden Basen eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^3$ zu berechnen.

a) $\mathcal{B}_1 := \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

b) $\mathcal{B}_2 := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

2. **a)** Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ das uneigentliche Integral

$$I_n := \int_0^\infty x^n e^{-x} \mathrm{d}x$$

existiert.

b) Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$\langle p, q\rangle := \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x} \mathrm{d}x \quad \big(p, q \in P(\mathbb{R})\big)$$

ein inneres Produkt auf $P(\mathbb{R})$ definiert.

c) Zeigen Sie, dass genau eine orthonormale Menge $\{p_n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ existiert, sodass für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt $\deg(p_n) = n$ und der Leitkoeffizient von p_n ist positiv und zeigen Sie, dass sich jedes Element in $P(\mathbb{R})$ auf eindeutige Weise als Linearkombination dieser Polynome schreiben lässt.

Bitte wenden!

d) Berechnen Sie p_0, p_1, p_2 explizit.

$^{\heartsuit}$**3.** Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, sodass $g(x) \geq 0$ for all $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass für alle stetigen Funktionen $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\psi(x)g(x)\mathrm{d}x \right|^2 \leq \left(\int_a^b \varphi(x)^2 g(x)\mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b \psi(x)^2 g(x)\mathrm{d}x \right)$$

4. Im Folgenden sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und bezeichne $\|\cdot\|$ die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm auf V.

a) Seien $v, w \in V$. Zeigen Sie, dass $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ genau dann gilt, wenn v und w zueinander orthogonal sind. Folgern Sie daraus den Satz von Pythagoras in $\mathbb{R}^2$.

b) Beweisen Sie, dass für alle $v, w \in V$ die *Parallelogrammgleichung* gilt:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

***c)** Sei W ein $\mathbb{R}$-Vektorraum versehen mit einer Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass folgende Äquivalent sind:

1. Es existiert ein inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf W, welches $\|\cdot\|$ induziert.
2. Die Norm $\|\cdot\|$ erfüllt die Parallelogrammgleichung aus Teilaufgabe b).

Hinweis: Untersuchen Sie die Abbildung $W \times W \to \mathbb{R}$,

$$(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle := \frac{1}{4}\big(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2\big)$$

und zeigen Sie

i) $\forall\, w \in W : \langle 0, w \rangle = 0.$
ii) $\forall\, v_1, v_2, w \in W : \langle v_1 + v_2, w \rangle + \langle v_1 - v_2, w \rangle = 2\langle v_1, w \rangle.$
iii) $\forall\, v_1, v_2, w \in W : \langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle.$
iv) $\forall\, v, w \in W\, \forall\, n \in \mathbb{Z} : \langle nv, w \rangle = n\langle v, w \rangle.$
v) $\forall\, v, w \in W\, \forall\, n \in \mathbb{N} : n\langle \frac{1}{n}v, w \rangle = \langle v, w \rangle.$
vi) $\forall\, v, w \in W\, \forall\, r \in \mathbb{Q} : \langle rv, w \rangle = r\langle v, w \rangle.$
vii) $\forall\, v, w \in W : |\langle v, w \rangle| \leq \|v\|\|w\|.$
viii) $\forall\, v, w \in W\, \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \forall r \in \mathbb{Q}$:

$$|\lambda\langle v, w \rangle - \langle \lambda v, w \rangle| = |(\lambda - r)\langle v, w \rangle - \langle (\lambda - r)v, w \rangle| \leq 2|\lambda - r|\|v\|\|w\|.$$

Siehe nächstes Blatt!

ix) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist ein inneres Produkt und induziert $\|\cdot\|$.

5. **a)** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass für jeden Endomorphismus $T : V \to V$ gilt: wenn $\|T(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$, dann ist T injektiv.

b) Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Gegeben eine Abbildung $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ definiere $\langle\cdot,\cdot\rangle_T : V \times V \to \mathbb{R}$ durch

$$\langle v, w\rangle_T := \langle T(v), T(w)\rangle \quad (v, w \in V).$$

Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ genau dann ein inneres Produkt auf V definiert, wenn T injektiv ist.

c) Für V und $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ wie in Teilaufgabe b) und $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ definieren wir

$$\big(v + \mathrm{Ker}(T), w + \mathrm{Ker}(T)\big)_T := \langle T(v), T(w)\rangle \quad (v, w \in V).$$

Zeigen Sie, dass $(\cdot,\cdot)_T$ ein inneres Produkt auf $V/\mathrm{Ker}(T)$ definiert.

6. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum.

$^\heartsuit$**a)** Zeigen Sie, dass die Abbildung $v \in V \mapsto \Phi_v \in V^*$ mit $\Phi_v(w) := \langle w, v\rangle$ für alle $w \in V$ ein Isomorphismus ist.

$^\heartsuit$**b)** Sei $f \in C\big([a, b], V\big)$ eine stetige Funktion definiert auf dem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit Werten in V, wobei V mit der Metrik induziert durch das innere Produkt versehen ist. Wir definieren das Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \in V$ von f durch

$$\forall w \in V : \quad \langle \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, w\rangle = \int_a^b \langle f(x), w\rangle \mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $\int_a^b : C\big([a, b], V\big) \to V$ wohldefiniert und linear ist.

***c)** Sei $F : [a, b] \to \mathrm{End}(V)$, so dass für alle $v \in V$ die Abbildung $F_v : [a, b] \to V$ definiert durch $x \mapsto F(x)(v)$ stetig ist. Zeigen Sie, dass ein Endomorphismus $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x : V \to V$ existiert, sodass für alle $v, w \in V$ gilt

$$\left\langle \left(\int_a^b F(x)\mathrm{d}x\right)(v), w \right\rangle = \int_a^b \langle F(x)(v), w\rangle \mathrm{d}x.$$

Bemerkung: Der Isomorphismus aus Teilaufgabe $^\heartsuit$a) gilt, wenn korrekt formuliert, auch für gewisse unendlichdimensionale Euklidische Vektorräume (die sogenannten Hilberträume). In diesem Falle ist er als *Riesz' Isomorphismus* bekannt und die Resultate aus Teilaufgaben $^\heartsuit$b) und *c) folgen analog.

Bitte wenden!

7. Online-Abgabe

1. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Dann ist jede Teilmenge paarweise orthogonaler Vektoren linear unabhängig.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Dann ist jede orthonormale Teilmenge linear unabhängig.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und seien $u, v, w \in V$. Wenn $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$, dann ist $v = w$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und seien $u, v \in V$, sodass $\|u+v\| = 2$ und $\|u-v\| = \sqrt{8}$. Dann ist

(a) $\langle u, v\rangle = -1$

(b) $\langle u, v\rangle = 4$

(c) $\langle u, v\rangle = -4$

(d) $\langle u, v\rangle = \sqrt{2}$

(e) $\langle u, v\rangle = 0$

Siehe nächstes Blatt!

5. Welche der folgenden Vorschriften definieren innere Produkte auf den entsprechenden $\mathbb{R}$-Vektorräumen?

(a) $\langle (a,b),(c,d)\rangle = ac - bd$ auf $\mathbb{R}^2$

(b) $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A+B)$ für $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $\langle p, q\rangle := \int_0^1 p'(x)q(x)\mathrm{d}x$ für $p, q \in P(\mathbb{R})$, wobei p' die Polynomfunktion nach formaler Ableitung von p ist.

(d) Keine der obigen Möglichkeiten

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 20. März in der Übungsstunde oder davor im Fach Ihrer Assistentin/Ihres Assistenten im HG J 68.