Serie 6:
Selbstadjungierte Abbildungen & 1. Spektralsatz, orthogonale Abbildungen

1. $^{\heartsuit}$**a)** Alle Eigenwerte einer reellen, symmetrischen Matrix in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ sind reell. (Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ist reell, wenn $A_{ij} \in \mathbb{R}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt.)

b) Beweisen Sie die folgende Aussage: Jede reelle symmetrische Matrix endlicher Ordnung $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist eine Involution, d.h. $A^2 = I_n$.

$^{\heartsuit}$**c)** Sei $O(n) := \{Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \mid Q^{-1} = Q^T\}$. Zeigen Sie, dass die Menge $O(n)$ mit der von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ induzierten Gruppenoperation eine Gruppe, die sogenannte orthogonale Gruppe, ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SO}(n) := \{Q \in O(n) \mid \det(Q) = 1\}$ ebenfalls eine Gruppe ist.

$^{\heartsuit}$**d)** Für zwei Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sagen wir, dass A zu B orthogonal äquivalent ist, wenn eine orthogonale Matrix $Q \in O(n)$ existiert, sodass $B = Q^T AQ$ gilt. Zeigen Sie, dass orthogonale Äquivalenz eine Äquivalenzrelation auf der Menge $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definiert.

2. $^{\heartsuit}$**a)** *(Cholesky Zerlegung)* Beweisen Sie die Existenz der Cholesky-Zerlegung für positiv definite symmetrische Matrizen: Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine positiv definite, symmetrische Matrix. Dann existiert eine obere Dreiecksmatrix R mit strikt positiven Diagonaleinträgen, sodass $A = R^T R$ gilt.

b) *(Iwasawa Zerlegung)* Sei $M \in \mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}) = \{B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \mid \det(B) = 1\}$. Zeigen Sie, dass eindeutige Matrizen $Q \in SO(n)$, $A, N \in \mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ existieren, sodass N eine obere Dreiecksmatrix mit allen Einträgen auf der Diagonalen gleich 1 ist, A eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen auf der Diagonalen mit Produkt gleich 1 ist und $M = QAN$ gilt.

Bemerkung: Man beachte, dass die Iwasawa-Zerlegung eine Verfeinerung der QR-Zerlegung beschreibt.

Bitte wenden!

c) Berechnen Sie die Iwasawa-Zerlegung der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -1 \\ -2/3 & 0 & 1 \\ 2/3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Im Folgenden sei V der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die 2π-periodisch sind, d.h. $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Versehen mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

ist V ein euklidischer Vektorraum. Betrachten Sie den Endomorphismus

$$D : V \to V, f \mapsto \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

a) Zeigen Sie, dass eine zu D adjungierte Abbildung mit der definierenden Eigenschaft $\langle Df, g \rangle = \langle f, D^*g \rangle$ existiert und bestimmen Sie diese. Ist D selbstadjungiert?

b) Betrachten Sie den Operator $\Delta = -D^2$ und bestimmen Sie ebenfalls die Adjungierte.

c) Sei $U \subset V$ der durch die Menge

$$\{x \mapsto \cos(nx) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \mapsto \sin(nx) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

erzeugte Unterraum. Zeigen Sie, dass U eine orthonormale Teilmenge bestehend aus Eigenvektoren von Δ besitzt, die U erzeugt.

4. Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorram und sei W ein Unterraum.

a) Zeigen Sie, dass eine Projektion P von V auf W genau dann selbstadjungiert ist, wenn P die orthogonale Projektion ist.

b) Sei $i : W \to V$ die Inklusion $i(w) := w$. Bestimmen Sie i^*.

***5.** Wir geben in dieser Aufgabe einen alternativen Beweis für folgende, bereits in der Vorlesung bewiesene, Tatsache:

Lemma: Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Angenommen, $\dim V \geq 1$, dann besitzt T einen Eigenvektor in V.

Siehe nächstes Blatt!

a) Sei $(W, \|\cdot\|_W)$ ein endlichdimensionaler, normierte Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass jede lineare Abbildung $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, W)$ stetig ist. Folgern Sie daraus, dass in jedem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $(W, \|\cdot\|_W)$ die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1} = \{w \in W \mid \|w\|_W \leq 1\}$ und die Einheitssphäre $S(W) = \{w \in W \mid \|w\|_W = 1\}$ kompakt sind.

b) Zeigen Sie, dass jeder Homomorphismus $T : W \to V$ zwischen endlichdimensionalen, normierten Vektorräumen stetig ist.

Hinweis: Sei $T \in \mathrm{Hom}(W, V)$ nicht stetig an der Stelle $v \in W$. Konstruieren Sie mit T und v eine Abbildung $\tilde{T} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, V)$, die an einem Punkt $v' \in \mathbb{R}^m$ eine Unstetigkeitsstelle besitzt.

c) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ wie im Lemma. Zeigen Sie, dass das Supremum

$$\alpha := \sup\{\langle Tv, v\rangle \mid v \in V : \|v\| \leq 1\}$$

angenommen wird und zeigen Sie, dass für alle $v \in V$ gilt

$$\langle Tv, v\rangle \leq \alpha \|v\|^2.$$

d) Zeigen Sie, dass auch das Supremum $\|T\| := \sup\left\{\frac{\|Tv\|}{\|v\|} \mid v \in V \setminus \{0\}\right\}$ angenommen wird und zeigen Sie, dass $\|T\| = \sup\{\langle Av, v\rangle \mid v \in V : \|v\| \leq 1\}$.

Hinweis: Es reicht auch hier für die erste Aussage, Ausdrücke der Form $\frac{\|Tv\|}{\|v\|}$ für $\|v\| = 1$ zu betrachten. Für die zweite Aussage können sie (warum?) annehmen, dass $T \neq 0$ gilt. Sei $\lambda > 0$. Subtrahieren Sie für beliebiges $v \in V$ die Ausdrücke

$$\langle T(\lambda v \pm \lambda^{-1} Tv), \lambda v \pm \lambda^{-1} Tv\rangle$$

voneinander und verwenden Sie die Parallelogrammgleichung. Danach wählen Sie λ geschickt.

e) Zeigen Sie für $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\|Tv\| = \sup\left\{\frac{\|Tv\|}{\|v\|} \mid v \in V \setminus \{0\}\right\}$, dass v ein Eigenvektor ist.

6. Online-Abgabe

1. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann besitzen T und T^* dieselben Eigenvektoren.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Sei V ein Euklidischer Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Die Identität ist selbstadjungiert.

(b) Die Nullabbildung ist selbstadjungiert.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

3. Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$, sodass $T = T^*$. Dann ist T diagonalisierbar.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. Sei $Q \in O(n)$, dann ist Q diagonalisierbar.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

5. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ eine orthogonale Abbildung. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, dann ist $[T]_{\mathcal{B}}$ orthogonal

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Siehe nächstes Blatt!

6. Eine Isometrie auf einem Euklidischen Vektorraum ist eine Abbildung $T : V \to V$, sodass $\|Tv\| = \|v\|$ für alle $v \in V$ gilt. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Jede Isometrie ist orthogonal.

(b) Jede orthogonale Abbildung ist eine Isometrie.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 3. April in der Übungsstunde oder davor im Fach Ihrer Assistentin/Ihres Assistenten im HG J 68.