Lösung 7:
Bilinearformen

1. **a)** 1. Seien $u_1, u_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gelten nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} L_v(u_1 + \lambda u_2) =&\beta(v, u_1 + \lambda u_2) = \beta(v, u_1) + \beta(v, \lambda u_2) \\ =&\beta(v, u_1) + \lambda\beta(v, u_2) = L_v(u_1) + \lambda L_v(u_2), \\ R_v(u_1 + \lambda u_2) =&\beta(u_1 + \lambda u_2, v) = \beta(u_1, v) + \beta(\lambda u_2, v) \\ =&\beta(u_1, v) + \lambda\beta(u_2, v) = R_v(u_1) + \lambda R_v(u_2). \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass eine Abbildung $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ genau dann bilinear ist, wenn für alle $v \in V$ die zu β assoziierten Abbildungen $L_v, R_v : V \to \mathbb{K}$ linear sind. Im Folgenden bezeichnen wir mit *Linearität von β im ersten Argument* die Linearität von R_v für alle $v \in V$ und mit *Linearität von β im zweiten Argument* die Linearität von L_v für alle $v \in V$.

2. Da für alle $u \in U$ die zu β assoziierten Abbildungen $L_u, R_u : V \to \mathbb{K}$ – wie gerade gezeigt wurde – linear sind, gelten

$$\beta(u, 0) = L_u(0) = 0 \text{ und } \beta(0, u) = R_u(0) = 0.$$

3. Wegen Linearität im ersten Argument ist

$$\beta(u + v, w + z) = \beta(u, w + z) + \beta(v, w + z).$$

Wegen Linearität im zweiten Argument sind

$$\beta(u, w + z) = \beta(u, w) + \beta(u, z) \text{ und } \beta(v, w + z) = \beta(v, w) + \beta(v, w).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \beta(u + v, w + z) =&\beta(u, w + z) + \beta(v, w + z) \\ =&\beta(u, w) + \beta(u, z) + \beta(v, w) + \beta(v, w). \end{aligned}$$

Bitte wenden!

4. Sei $v \in V$ beliebig, und seien $L_{\alpha,v}, R_{\alpha,v} : V \to \mathbb{K}$ sowie $L_{\beta,v}, R_{\beta,v} : V \to \mathbb{K}$ die mit α bzw. mit β assoziierten Abbildungen aus Teil 1. Dann gelten für $u \in V$

$$\begin{aligned} L_{\alpha,v}(u) =& \alpha(v,u) = \beta(u,v) = R_{\beta,v}(u), \\ R_{\alpha,v}(u) =& \alpha(u,v) = \beta(v,u) = L_{\beta,v}(u), \end{aligned}$$

und wegen der Bilinearität von β folgt die Linearität von $L_{\alpha,v}, R_{\alpha,v}$ für beliebige $v \in V$. Wie in Teil 1 besprochen, ist α also bilinear.

b) Seien $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{BF}(V)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\psi_{\mathcal{B}}(\beta_1 + \lambda\beta_2)_{ij} = \beta_1(v_i, v_j) + \lambda\beta_2(v_i, v_j) = \psi_{\mathcal{B}}(\beta_1)_{ij} + \lambda\psi_{\mathcal{B}}(\beta_2)_{ij}$$

nach Definition der Vektorraumstruktur auf $\mathrm{BF}(V) \subset \mathrm{Abb}(V \times V, \mathbb{K})$, und wir erhalten

$$\psi_{\mathcal{B}}(\beta_1 + \lambda\beta_2) = \psi_{\mathcal{B}}(\beta_1) + \lambda\psi_{\mathcal{B}}(\beta_2),$$

da die Vektorraumstruktur auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ mittels komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation definiert ist.

c) **Reflexivität:** Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Wegen $I_n = I_n^T$ gilt $I_n^T A I_n = A$ und somit ist A kongruent zu sich selber.

Symmetrie: Sei $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$, dann ist wie in der Linearen Algebra I besprochen wurde auch $Q^T \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ und es gilt $(Q^T)^{-1} = (Q^{-1})^T$. Seien nun $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$, sodass $B = Q^T A Q$. Sei $R := Q^{-1}$, dann folgt aus vorangehenden Ausführungen, dass

$$R^T B R = (R^T Q^T) A (QR) = A$$

und folglich impliziert die Kongruenz von A zu B die Kongruenz von B zu A.

Transitivität: Seien $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $Q, R \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$, sodass $B = Q^T A Q$ und $C = R^T B R$ gelten. Dann ist

$$C = R^T B R = R^T Q^T A Q R = (QR)^T A (QR)$$

und weil $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ abgeschlossen ist unter Matrixmultiplikation, folgt aus der Kongruenz von A zu B und der Kongruenz von B zu C die Kongruenz von A zu C.

d) Wegen der Distributivität der Matrixmultiplikation gilt für alle $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dass

$$(x_1 + \lambda x_2)^T A y = (x_1^T + \lambda x_2^T) A y = x_1^T A y + \lambda x_2^T A y$$

Siehe nächstes Blatt!

und somit ist die Abbildung linear im ersten Argument. Da $x_1^T Ay \in \mathbb{R}$ ist, gilt

$$x^T Ay = (x^T Ay)^T = y^T A^T x = y^T Ax$$

und somit ist die Abbildung symmetrisch. Die positive Definitheit folgt sofort aus der Annahme, dass A positiv definit ist, i.e. nach Voraussetzung gilt $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $x^T Ax = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

e) Sei $\beta \in \mathrm{BF}(\mathbb{K}^n)$ die Bilinearform definiert durch

$$\beta(x, y) = x^T Ay \quad (x, y \in \mathbb{K}^n).$$

Dann ist β symmetrisch, denn es ist

$$\beta(x, y) = x^T Ay = (x^T Ay)^T = y^T A^T x = y^T Ax = \beta(y, x)$$

für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$. Man bemerke, dass $A = [\beta]_{\mathcal{E}_n}$ ist.

Da nach Voraussetzung $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$, ist β nach §7.2, Theorem 2, diagonalisierbar, d.h. es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^n$, sodass $[\beta]_{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.

Sei nun $Q := [I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{B}}$, dann ist Q invertierbar und nach §7.1, Theorem 7.3 gilt

$$A = [\beta]_{\mathcal{E}_n} = Q^T [\beta]_{\mathcal{B}} Q,$$

und weil $[\beta]_{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist, ist A kongruent zu einer Diagonalmatrix.

2. Wir verwenden die in der Vorlesung skizzierte, symmetrische Diagonalisierung, und erhalten unter der dort verwendeten Notation – d.h. wir wenden auf die rechte Seite der erweiterten Matrix nur die Zeilenoperationen an – folgende diagonale Form

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{S_2 \to S_2 + S_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 + Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{S_3 \to S_3 - \frac{2}{3} S_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{5}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - \frac{2}{3} Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{S_3 \to S_3 - \frac{1}{2} S_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Bitte wenden!

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - \frac{1}{2} Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Es gilt also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

3. Da A positiv definit ist, definiert die Abbildung $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle_A := x^T A y$ ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^n$. Zudem ist A invertierbar. Es gilt per definitionem

$$\langle A^{-1} B x, y \rangle_A = x^T B^T (A^{-1})^T A y = x^T B y = x^T A A^{-1} B y = \langle x, A^{-1} B y \rangle_A$$

und somit ist die Abbildung $L_{A^{-1}B}$ selbstadjungiert bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$. Insbesondere besitzt $\mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ (bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$) bestehend aus Eigenvektoren von $L_{A^{-1}B}$. Sei $Q = (v_1 \mid \ldots \mid v_n)$ die Matrix mit den Elementen einer solchen Orthonormalbasis als Spalten. Nach Annahme ist $(Q^{(i)})^T A Q^{(j)} = \delta_{ij}$ und folglich $Q^T A Q = I_n$. Insbesondere ist also $Q^T A = Q^{-1}$. Andererseits ist $Q = [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n}$ und somit nach Konstruktion $D := Q^{-1}(A^{-1}B)Q$ eine Diagonalmatrix. Es folgt

$$D = Q^{-1}(A^{-1}B)Q = Q^T A (A^{-1} B) Q = Q^T B Q$$

und es folgt die Behauptung.

Für nicht postiv definite Matrizen muss dies nicht gelten, wie sich anhand des Beipiels belegen lässt. Sei $Q = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$, sodass $Q^T A Q$ und $Q^T B Q$ beides Diagonalmatrizen sind. Man berechnet

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} \text{ sowie } Q^T B Q = \begin{pmatrix} 2ac & ad + bc \\ ad + bc & 2bd \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $ab - cd = ad + bc = 0$ und insbesondere $ad = -bc$ und $ab = cd$. Da Q invertierbar ist, gilt $0 \neq ad - bc = 2ad = -2bc$. Insbesondere sind alle Einträge von Q von 0 verschieden. Es folgt

$$\frac{d}{b} = \frac{ad}{ab} = -\frac{bc}{cd} = -\frac{b}{d}.$$

Das ist absurd.

4. Wegen der Linearität der Spur ist für alle $A_1, A_2, A, B_1, B_2, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$

$$\mathrm{tr}(A_1 + \lambda A_2)\mathrm{tr}(B) = \big(\mathrm{tr}(A_1) + \lambda \mathrm{tr}(A_2)\big)\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A_1)\mathrm{tr}(B) + \lambda \mathrm{tr}(A_2)\mathrm{tr}(B)$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B_1 + \lambda B_2) = \mathrm{tr}(A)\big(\mathrm{tr}(B_1) + \lambda\mathrm{tr}(B_2)\big) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B_1) + \lambda\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B_2)$$

und somit ist die Abbildung bilinear. Schreibe $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, dann ist $\mathrm{tr}(v_i) = 1$ falls $i = 1$ oder $i = 4$ und 0 sonst. Daher gilt

$$[\beta]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Man beachte, dass β ein inneres Produkt ist. Die Symmetrie folgt aus der Symmetrie von A. Seien nun $v = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, dann ist

$$\beta(v,v) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (\sqrt{5}x_1 + \tfrac{2}{5}x_2)^2 + (5 - \tfrac{4}{5})x_2^2 \geq 0$$

und somit ist β positiv semidefinit. Da A invertierbar ist, ist somit A positiv definit.

Wir wenden das Gram-Schmidt Orthonoalisierungsverfahren auf die positiv definite, symmetrische Bilinearform β und die Standardbasis $\mathcal{E}_2$ an. Sei $v_1 := e_1$. Es ist $\beta(v_1, v_1) = 5$. Definiere

$$v_2 := e_2 - \frac{\beta(v_2, v_1)}{\beta(v_1, v_1)} v_1 = -\frac{2}{5}e_1 + e_2.$$

Da v_1, v_2 linear unabhängig sind, ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^2$.

Es gilt

$$\beta(v_2, v_2) = (-2/5, 1)\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 21/5)\begin{pmatrix} 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} = 21/5$$

sowie nach Konstruktion

$$\beta(v_1, v_2) = \beta(v_2, v_1) = 0.$$

Da $\beta(v_i, v_i) > 0$ ist für $i = 1, 2$, sind $w_i := \frac{1}{\sqrt{\beta(v_i,v_i)}} v_i$ wohldefiniert und $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Aus der Bilinearität von β folgt $\beta(w_i, w_j) = \delta_{i,j}$ $(i, j = 1, 2)$, und somit ist $[\beta]_{\mathcal{B}} = I_2$.

6. **a)** Nach Definition der Vektorraumstruktur auf V^* gilt für alle $f_1, f_2 \in V^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$ sowie $v \in V$, dass

$$(f_1 + \lambda f_2)(v) = f_1(v) + \lambda f_2(v)$$

und somit haben wir Linearität im ersten Argument.

Da jedes $f \in V^*$ per definitionem linear ist, gilt für alle $v_1, v_2 \in V$ sowie $\lambda \in \mathbb{K}$, dass

$$f(v_1 + \lambda v_2) = f(v_1) + \lambda f(v_2)$$

und es gilt Linearität im zweiten Argument.

Bitte wenden!

b) Wir zeigen, dass die Menge der bilinearen Abbildungen $V \times W \to \mathbb{K}$ ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(V \times W, \mathbb{K})$ ist.

Die Nullabbildung gegeben durch $(v, w) \mapsto 0 \in \mathbb{K}$ für alle $v \in V$ und $w \in W$ ist sicherlich eine bilineare Abbildung und somit ist die Menge der bilinearen Abbildungen nicht-leer.

Seien $\beta_1, \beta_2 : V \times W \to \mathbb{K}$ bilinear und sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Seien $v_1, v_2, v \in V$, $w_1, w_2, w \in W$ sowie $\mu \in \mathbb{K}$ beliebig, dann gelten nach Definition der Vektorraumstruktur auf $\mathrm{Abb}(V \times W, \mathbb{K})$ sowie der Bilinearität von β_1 und β_2

$$\begin{aligned}(\beta_1 + \lambda\beta_2)(v_1 + \mu v_2, w) =& \beta_1(v_1 + \mu v_2, w) + \lambda\beta_2(v_1 + \mu v_2, w)\\ =& \beta_1(v_1) + \mu\beta_1(v_1, w) + \lambda\beta_2(v_1, w) + \mu\lambda\beta_2(v_2, w)\\ =& \big(\beta_1(v_1, w) + \lambda\beta_2(v_1, w)\big) + \mu\big(\beta_1(v_2, w) + \lambda\beta_2(v_2, w)\big)\\ =& (\beta_1 + \lambda\beta_2)(v_1, w) + \mu(\beta_1 + \lambda\beta_2)(v_2, w)\end{aligned}$$

und somit ist $\beta_1 + \lambda\beta_2$ linear im ersten Argument. Analog erhält man

$$\begin{aligned}(\beta_1 + \lambda\beta_2)(v, w_1 + \mu w_2) =& \beta_1(v, w_1 + \mu w_2) + \lambda\beta_2(v, w_1 + \mu w_2)\\ =& \beta_1(v, w_1) + \mu\beta_1(v, w_1) + \lambda\beta_2(v, w_1) + \mu\lambda\beta_2(v, w_2)\\ =& \big(\beta_1(v, w_1) + \lambda\beta_2(v, w_1)\big) + \mu\big(\beta_1(v, w_2) + \lambda\beta_2(v, w_2)\big)\\ =& (\beta_1 + \lambda\beta_2)(v, w_1) + \mu(\beta_1 + \lambda\beta_2)(v, w_2)\end{aligned}$$

und $\beta_1 + \lambda\beta_2$ ist linear im zweiten Argument. Insbesondere ist also $\beta_1 + \lambda\beta_2$ bilinear.

c) **“$\Rightarrow$”:** Falls $V \cong W$ gilt, dann ist $\dim(V) = \dim(W)$. Sei also $(v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, sei $(w_1, \ldots, w_n)$ eine geordnete Basis von W und sei $(f_1, \ldots, f_n)$ die assoziierte duale Basis von W^*, d.h. $f_i(w_j) = \delta_{i,j}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Sei $\Phi : V \to W^*$ der eindeutige Isomorphismus mit $\Phi(v_i) = f_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Die Abbildung $(v, w) \mapsto \Phi(v)(w)$ ist nach Teilaufgabe a) bilinear. Wir zeigen, dass sie nicht ausgeartet ist. Sei $v \neq 0$ und sei $\Phi(v) = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$. Da $v \neq 0$ und Φ ein Isomorphismus (insbesondere also injektiv) ist, existiert ein $1 \leq i \leq n$, sodass $a_i \neq 0$ ist. Es ist $\Phi(v)(w_i) = a_i \neq 0$. Sei andererseits $w \in W \setminus \{0\}$ und sei $w = b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n$. Da $w \neq 0$, existiert ein $1 \leq i \leq n$, sodass $b_i \neq 0$ gilt. Es ist $\Phi\big(\Phi^{-1}(f_i)\big)(w) = f_i(w) = b_i \neq 0$. Also ist die Bilinearform nicht ausgeartet und die gewünschte Implikation ist bewiesen.

“$\Leftarrow$”: Angenommen $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ ist eine nicht ausgeartete Bilinearform. Für jedes $v \in V$ definiert, unter Verwendung der Linearität von β im zweiten Argument, die Abbildung $\beta_v : W \to \mathbb{K}$, $w \mapsto \beta(v, w)$, ein Element in W^*. Da β nicht ausgeartet ist, ist β_v für alle $v \in V \setminus \{0\}$ nicht das Nullelement in W^*. Andererseits gilt unter Verwendung der Linearität von β im ersten Argument für $v_1, v_2 \in V$, $w \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\beta_{v_1 + \lambda v_2}(w) = \beta_{v_1}(w) + \lambda\beta_{v_2}(w)$$

Siehe nächstes Blatt!

und somit ist die Abbildung $V \to W^*$, $v \mapsto \beta_v$, linear und weil $\beta_v = 0$ genau dann gilt, wenn $v = 0$ ist, auch injektiv. Da jede injektive lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen Vektorräumen linear unabhängige Mengen auf linear unabhängige Mengen abbildet, folgt $\dim(V) \leq \dim(W^*) = \dim(W)$. Analog zeigt man $\dim(W) \leq \dim(V)$ und es folgt $\dim(V) = \dim(W)$ und somit die gewünschte Isomorphie.