Serie 7:
Bilinearformen

1. **a)** Im Folgenden sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform auf V. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften von β:

1. Sei $v \in V$, dann sind die Abbildungen $L_v, R_v : V \to \mathbb{K}$ definiert durch
$$L_v(u) := \beta(v, u) \text{ und } R_v(u) := \beta(u, v) \quad (u \in V)$$
linear.
2. $\beta(u, 0) = \beta(0, u) = 0$ für alle $u \in V$.
3. Für alle $u, v, w, z, \in V$ gilt
$$\beta(u + v, w + z) = \beta(u, w) + \beta(v, w) + \beta(u, z) + \beta(v, z).$$
4. Sei $\alpha : V \times V \to \mathbb{K}$ die Abbildung gegeben durch
$$\alpha(u, v) := \beta(v, u) \quad (u, v \in V).$$
Dann ist α eine Bilinearform auf V.

$^\heartsuit$**b)** Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $n = \dim(V)$. Zeigen Sie, dass für jede geordnete Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V die Abbildung $\psi_{\mathcal{B}} : \mathrm{BF}(V) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$, gegeben durch
$$\forall \beta \in \mathrm{BF}(V) : \ \psi_{\mathcal{B}}(\beta)_{ij} = \beta(v_i, v_j) \quad (1 \leq i, j \leq n)$$
eine lineare Abbildung ist.

c) Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Wir sagen, A ist kongruent zu B, falls ein $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ existiert, sodass $B = Q^T AQ$ gilt. Zeigen Sie, dass Kongruenz eine Äquivalenzrelation definiert.

Bitte wenden!

d) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit, dann ist die Abbildung $(x, y) \mapsto x^T Ay$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ein inneres Produkt.

e) Beweisen Sie die folgende Aussage: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, in dem $2 \neq 0$ gilt und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ symmetrisch. Dann ist A kongruent zu einer Diagonalmatrix D.

2. Diagonalisieren Sie die zur symmetrischen reellen Matrix A gehörige Bilinearform, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

d.h. finden Sie eine Matrix $Q \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$, sodass $Q^T AQ$ eine Diagonalmatrix ist.

3. Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ reelle, symmetrische Matrizen und sei A positiv definit. Zeigen Sie, dass eine invertierbare Matrix $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ existiert, sodass $Q^T AQ$ und $Q^T BQ$ Diagonalmatrizen sind.

Hinweis: Betrachte das innere Produkt definiert durch A und diesbezüglich die Abbildung $L_{A^{-1}B}$.

Gilt die Aussage, wenn A nicht positiv definit ist? Untersuchen Sie hierfür die mit den Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ assoziierten Bilinearformen auf $\mathbb{R}^2$.

4. Betrachten Sie den Vektorraum $V = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ zusammen mit der geordneten Basis $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\beta(A, B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$. Zeigen Sie, dass β bilinear ist und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[\beta]_{\mathcal{B}}$ bezüglich $\mathcal{B}$ von β.

5. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und sei $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\beta(u, v) := u^T Av \quad (u, v \in \mathbb{R}^2).$$

Bestimmen Sie eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$, sodass β bezüglich $\mathcal{B}$ eine Darstellungsmatrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{smallmatrix}\right)$ besitzt.

Siehe nächstes Blatt!

$^\heartsuit$**6.** Seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ heisst Bilinearform, falls für jedes $v_1 \in V$ und $w_1 \in W$ die Abbildungen

$$V \to \mathbb{K}, v \mapsto \beta(v, w_1) \quad \text{(Linearität im 1. Argument)}$$
$$W \to \mathbb{K}, w \mapsto \beta(v_1, w) \quad \text{(Linearität im 2. Argument)}$$

linear sind.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $V^* \times V \to \mathbb{K}$, $(f, v) \mapsto f(v)$ eine Bilinearform ist.

b) Definieren Sie eine Vektorraumstruktur auf der Menge der bilinearen Abbldungen $V \times W \to \mathbb{K}$.

c) Eine Bilinearform $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ heisst *nicht ausgeartet*, wenn gilt

$$\forall v \in V \setminus \{0\} \exists w \in W : \beta(v, w) \neq 0,$$
$$\forall w \in W \setminus \{0\} \exists v \in V : \beta(v, w) \neq 0.$$

Zeigen Sie dass zwei endlichdimensionale Vektorräume V, W genau dann isomorph sind, wenn eine nicht ausgeartete Bilinearform $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ existiert.

7. Online-Abgabe

1. Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ für einen Körper $\mathbb{K}$ und seien A, B kongruent. Dann gilt $\sigma(A) = \sigma(B)$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\dim(V) > 1$ und sei $\beta \in \mathrm{BF}(V)$. Dann existiert für jedes $u \in V$ ein $v \in V \setminus \{0\}$, sodass $\beta(u, v) = 0$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Bitte wenden!

3. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ symmetrisch, dann ist A kongruent zu einer Diagonalmatrix.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $\beta \in \mathrm{BF}(V)$, dann existiert eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $[\beta]_{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

5. Jedes innere Produkt auf einem reellen Vektorraum ist eine Bilinearform.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

6. Jede Bilinearform auf einem reellen Vektorraum ist ein inneres Produkt.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

7. Betrachte die Abbildung $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\beta\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) := \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist β bilinear.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 10. April in der Übungsstunde oder davor im Fach Ihrer Assistentin/Ihres Assistenten im HG J 68.