Lösung 8: Quadratische Formen, Sylvesters Trägheitssatz

1. Wir erinnern an den Hauptachsensatz: Jede von 0 verschiedene quadratische Form Q auf $\mathbb{R}^3$ ist bis auf Kongruenz äquvalent zu einer quadratischen Form definiert durch Diagonalmatrizen der Form

$$\pm\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

Man beachte, dass $X_{-Q,a} = X_{Q,-a}$ gilt, und folglich reicht es aus, die Fälle $(p,q) = (0,0)$, $(p,q) = (1,0)$, $(p,q) = (2,0)$, $(p,q) = (3,0)$, $(p,q) = (1,1)$ sowie $(p,q) = (2,1)$ zu beschreiben.

“$p = 0, q = 0$”: Die quadratische Form ist die 0 Form, also gilt $X_{Q,a} = \mathbb{R}^3$ falls $a = 0$ ist, und $X_{Q,a} = \emptyset$ sonst.

“$p = 1, q = 0$”: Die quadratische Form ist das Monom in der ersten Koordinate $x \mapsto \alpha_1 x_1^2$ auf $\mathbb{R}$ mit $\alpha_1 > 0$. Folglich gilt

$$X_{Q,a} = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } a < 0 \\ \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\} & \text{falls } a = 0 \\ \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \pm\sqrt{a/\alpha_1}\} & \text{sonst} \end{cases},$$

also entweder die leere Menge, die yz-Ebene, oder die disjunkte Vereinigung zweier Ebenen parallel zur yz-Ebene.

“$p = 2, q = 0$”: Die quadratische Form bildet entlang der Hauptachsen x auf $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2$ ab, wobei $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Im Wesentlichen handelt es sich um eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^2$ und da wissen wir, dass für alle $a < 0$ gilt $X_{Q,a} = \emptyset$ und für $a \geq 0$ die Quadrik eine Ellipse definiert. Insbesondere sei $a \geq 0$, dann bildet für fixes $z \in \mathbb{R}$ die Menge

$$X_{Q,a} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x_3 = z\}$$

eine Ellipse von Radius $\sqrt{a}$ um den Punkt $(0,0,z)$ in der Ebene

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid z = x_3\}$$

und somit ist $X_{Q,a}$ die Oberfläche eines Zylinders mit Querschnittsfläche eine Ellipse mit Mittelpunkt auf der z-Achse.

“$p=1, q=1$”: Die quadratische Form bildet entlang der Hauptachsen x auf $\alpha_1 x_1^2 - \alpha_2 x_2^2$ ab, wobei $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Im Wesentlichen handelt es sich um eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^2$ und da wissen wir, dass für $a = 0$ die Menge $X_{Q,a}$ ein Paar von Geraden durch den Ursprung ist und für $a \neq 0$ die Quadrik eine Hyperbel definiert. Analog zum vorangehenden Beispiel ist die Quadrik im $\mathbb{R}^3$ gegeben als die Vereinigung aller zur x_3-Achse parallelen Geraden, welche die x_1, x_2-Ebene in einer der entsprechenden Geraden ($a = 0$) bzw. in der entsprechenden Hyperbel ($a \neq 0$) schneiden.

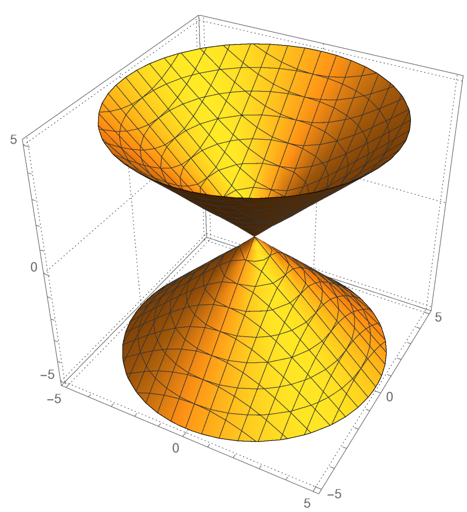
“$p=3, q=0$”: Es ist klar, dass $Q(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, und folglich ist $X_{Q,a} = \emptyset$, wann immer $a < 0$. Für $a \geq 0$ definiert die Gleichung

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = a$$

mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ die Oberfläche eines Ellipsoids.

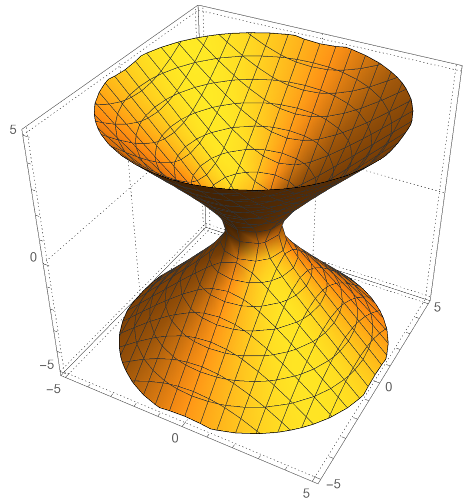
“$p=2, q=1$”: Die quadratische Form bildet entlang der Hauptachsen x auf $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 - \alpha_3 x_3^3$ ab mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$. Die Quadrik $X_{Q,a}$ ist also gegeben durch die Menge der $x \in \mathbb{R}^3$, sodass $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = a + \alpha_3 x_3^2$.

“$a=0$”: Für jedes von Null verschiedene $z \in \mathbb{R}$ ist die Menge der Lösungen auf Höhe $x_3 = z$, d.h. die Menge $X_{Q,a} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = z\}$, eine nicht-degenerierte Ellipse, und für $z = 0$ ist $X_{Q,a} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = z\} = \{0\}$. Die Vereinigung dieser Mengen für variierende z liefert einen Kegel (mit Querschnittsfläche eine Ellipse). Im folgenden Bild ist der Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ illustriert.

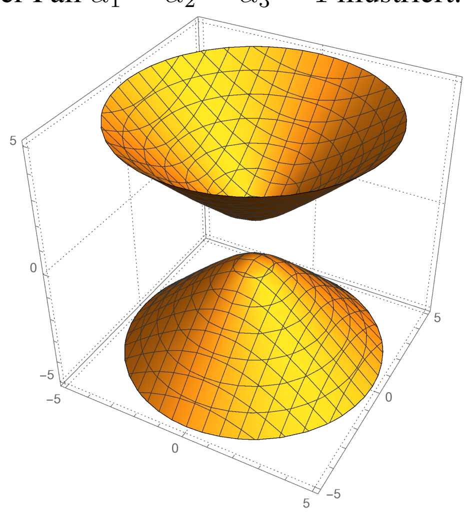


Siehe nächstes Blatt!

"$a > 0$": Für jedes $z \in \mathbb{R}$ ist die Schnittmenge $X_{Q,a} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = z\}$ eine nicht-degenerierte Ellipse, und die Vereinigung dieser Ellipsen für variierende $z \in \mathbb{R}$ liefert ein sogenanntes einschaliges Hyperboloid. Im folgenden Bild ist der Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ illustriert.



"$a < 0$": Man beachte, dass für jede Lösung $Q(x) = a$ die Ungleichung $a + \alpha_3 x_3^2 \geq 0$ erfüllt sein muss. Also ist $X_{Q,a} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = z\}$ genau dann nicht-leer, wenn $|z| \geq \sqrt{-a/\alpha_3}$. Für den Spezialfall $|z| \geq \sqrt{-a/\alpha_3}$ erhalten wir $X_{Q,a} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = z\} = \{ze_3\}$ und für $|z| > \sqrt{-a/\alpha_3}$ erhalten wir wieder eine nicht-degenerierte Ellipse. Die Vereinigung dieser Mengen für variierende $z \in \mathbb{R}$ liefert ein sogenanntes zweischaliges Hyperboloid. Im folgenden Bild ist der Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ illustriert.



2. a) (i) impliziert (ii): Da die Abbildung β_Q bilinear ist, existieren eine Basis $\mathcal{B}$ von V sowie eine durch $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmte Matrix A, sodass

$$\beta_Q(v, w) = [v]_{\mathcal{B}}^T A [w]_{\mathcal{B}} \quad (v, w \in V)$$

Bitte wenden!

gilt. Insbesondere ist also

$$[v]_{\mathcal{B}}^T A[v]_{\mathcal{B}} = \beta_Q(v,v) = \frac{1}{2}\big(Q(2v) - 2Q(v)\big) = Q(v).$$

(ii) impliziert (i): Aus der Linearität des Isomorphismus $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$ folgt

$$Q(\lambda v) = [\lambda v]_{\mathcal{B}}^T A[\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda^2 [v]_{\mathcal{B}}^T A[v]_{\mathcal{B}} = \lambda^2 Q(v) \quad (v \in V, \lambda \in \mathbb{K}),$$

da $[\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}}$.
Man beachte, dass die Abbildung β_Q symmetrisch ist, d.h. für alle $v, w \in V$ gilt $\beta_Q(v,w) = \beta_Q(w,v)$. Insbesondere reicht es zu zeigen, dass β_Q linear ist im zweiten Argument. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ und seien $v, w_1, w_2 \in V$, dann gilt wegen der Linearität von $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$

$$\begin{aligned}
\beta_Q(v, w_1 + \lambda w_2) =& [v]_{\mathcal{B}}^T A[w_1 + \lambda w_2]_{\mathcal{B}} \\
=& [v]_{\mathcal{B}}^T A\big([w_1]_{\mathcal{B}} + \lambda[w_2]_{\mathcal{B}}\big) \\
=& [v]_{\mathcal{B}}^T A[w_1]_{\mathcal{B}} + \lambda[v]_{\mathcal{B}}^T A[w_2]_{\mathcal{B}} \\
=& \beta_Q(v, w_1) + \lambda\beta_Q(v, w_2)
\end{aligned}$$

unter Verwendung der Distributivität der Matrixmultiplikation über die Matrixaddition. Da λ, v, w_1, w_2 beliebig waren, ist β_Q linear im zweiten Argument und wegen der Symmetrie bilinear.

b) Man überprüft leicht, dass die Nullabbildung eine quadratische Form auf V definiert (überprüfen Sie dies). Insbesondere ist die Menge der quadratischen Formen auf V nicht leer. Seien Q_1, Q_2 quadratische Formen auf V und sei $\mu \in \mathbb{K}$. Wir zeigen, dass die Abbildung $Q_1 + \mu Q_2$ eine quadratische Form auf V definiert. Für $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$(Q_1+\mu Q_2)(\lambda v) = Q_1(\lambda v)+\mu Q_2(\lambda v) = \lambda^2 Q_1(v)+\mu\lambda^2 Q_2(v) = \lambda^2(Q_1+\mu Q_2)(v).$$

Wir zeigen die Linearität von $\beta_{Q_1+\mu Q_2}$ im ersten Argument. Seien $v_1, v_2, w \in V$ und sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
2\beta_{Q_1+\mu Q_2}(v_1 + \lambda v_2, w) =& (Q_1 + \mu Q_2)(v_1 + \lambda v_2 + w) \\
& - (Q_1 + \mu Q_2)(v_1 + \lambda v_2) - (Q_1 + \mu Q_2)(w) \\
=& Q_1(v_1 + \lambda v_2 + w) + \mu Q_2(v_1 + \lambda v_2 + w) \\
& - Q_1(v_1 + \lambda v_2) - \mu Q_2(v_1 + \lambda v_2) \\
& - Q_1(w) - \mu Q_2(w) \\
=& 2\beta_{Q_1}(v_1 + \lambda v_2, w) + 2\mu\beta_{Q_2}(v_1 + \lambda v_2, w) \\
=& 2\beta_{Q_1}(v_1, w) + 2\lambda\beta_{Q_1}(v_2, w) \\
& + 2\mu\beta_{Q_2}(v_1, w) + 2\mu\beta_{Q_2}(v_2, w)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&Q_1(v_1+w)-Q_1(v_1)-Q_1(w)\\
&\quad+\lambda Q_1(v_2,w)-\lambda Q_1(v_2)-\lambda Q_1(w)\\
&\quad+\mu Q_2(v_1+w)-\mu Q_2(v_1)-\mu Q_2(w)\\
&\quad+\lambda\mu Q_2(v_2,w)-\lambda\mu Q_2(v_2)-\lambda\mu Q_2(w)\\
=&(Q_1+\mu Q_2)(v_1+w)-(Q_1+\mu Q_2)(v_1)\\
&\qquad-(Q_1+\mu Q_2)(w)\\
&\quad+\lambda(Q_1+\mu Q_2)(v_2+w)-\lambda(Q_1+\mu Q_2)(v_2)\\
&\qquad-\lambda(Q_1+\mu Q_2)(w)\\
=&2\beta_{Q_1+\mu Q_2}(v_1,w)+2\lambda\beta_{Q_1+\mu Q_2}(v_2,w).
\end{aligned}
$$

Also ist $\beta_{Q_1+\mu Q_2}$ linear im ersten Argument. Da $\beta_{Q_1+\mu Q_2}$ symmetrisch ist, folgt die Bilinearität.

Insbesondere besitzt die Abbildung $Q_1+\mu Q_2$ die Eigenschaften aus Teilaufgabe a), (i). Somit ist $Q_1+\mu Q_2$ eine quadratische Form auf V.

Somit ist gezeigt, dass die Menge der quadratischen Formen auf V ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(V,\mathbb{K})$ ist.

Als Zwischenresultat liefert obige Rechnung im Spezialfall $v_2=0$ die Gleichung

$$\beta_{Q_1+\mu Q_2}(v_1,w)=\beta_{Q_1}(v_1,w)+\mu\beta_{Q_2}(v_1,w).$$

Da v_1,w beliebig waren, gilt also $\beta_{Q_1+\mu Q_2}=\beta_{Q_1}+\mu\beta_{Q_2}$ und somit ist die Abbildung $Q\mapsto\beta_Q$ linear. Die Abbildung ist sicherlich symmetrisch, und somit wohldefiniert.

Sei β eine symmetrische Bilinearform auf V, und definiere $Q:V\to\mathbb{K}$ durch $Q(v):=\beta(v,v)$ für alle $v\in V$. Dann gilt für beliebige $\lambda\in\mathbb{K}$ und $v\in V$

$$Q(\lambda v)=\beta(\lambda v,\lambda v)=\lambda^2\beta(v,v)=\lambda^2 Q(v)$$

wegen der Bilinearität von β. Des Weiteren ist

$$
\begin{aligned}
2\beta_Q(v,w)=&Q(v+w)-Q(v)-Q(w)\\
=&\beta(v+w,v+w)-\beta(v,v)-\beta(w,w)=2\beta(v,w)
\end{aligned}
$$

wegen der Symmetrie von β. Folglich ist β_Q bilinear und Q eine quadratische Form.

Da β beliebig war, ist die Abbildung $Q\mapsto\beta_Q$ insbesondere surjektiv und invertierbar, und somit ein Isomorphismus.

3. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist die Darstellungsmatrix der quadratischen Form Q bezüglich der Basis $\mathcal{E}_3$ der Darstellungsmatrix der zugehörigen bilinearen

Abbildung. Diese wurde in Aufgabe 2. unabhängig von der Koordinatendarstellung von Q eingeführt. Es reicht also,

$$\beta(e_i, e_j) = \frac{1}{2}\big(Q(e_i + e_j) - Q(e_i) - Q(e_j)\big)$$

für $1 \leq i, j \leq 3$ zu berechnen. Man findet

$$\begin{aligned}
\beta(e_1, e_1) =& 1 \\
\beta(e_1, e_2) =& 0 \\
\beta(e_1, e_3) =& -1 \\
\beta(e_2, e_2) =& 2 \\
\beta(e_2, e_3) =& 2 \\
\beta(e_3, e_3) =& 6,
\end{aligned}$$

sodass

$$A = [\beta_Q]_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\det(1) = 1, \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 6.$$

Somit ist A positiv definit nach dem Hauptminorenkriterium.

Wie in der Vorlesung besprochen, kann man auch das symmetrische Gaussverfahren auf A anwenden und erhält

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 \to S_3 + S_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{S_3 \to S_3 - S_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

was ebenfalls zeigt, dass A positiv definit ist, da die Signatur einer Matrix invariant ist unter symmetrischen elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen.

Im Folgenden ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das standard innere Produkt auf $\mathbb{R}^3$. Für die Cholesky-Zerlegung wenden wir das Gram-Schmidt Verfahren bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ auf die Standardbasis $\mathcal{E}_3$ an, wobei $\langle x, y \rangle_A := \langle x, Ay \rangle = x^T Ay$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Man berechnet

$$\langle e_1, e_1 \rangle_A = \langle e_1, e_1 - e_3 \rangle = 1$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\begin{aligned}
\langle e_1, e_2\rangle_A =& \langle e_1, 2e_2 + 2e_3\rangle = 0\\
\langle e_1, e_3\rangle_A =& \langle e_1, -e_1 + 2e_2 + 6e_3\rangle = -1\\
\langle e_2, e_2\rangle_A =& \langle e_2, 2e_2 + 2e_3\rangle = 2\\
\langle e_2, e_3\rangle_A =& \langle e_2, -e_1 + 2e_2 + 6e_3\rangle = 2
\end{aligned}$$

und wir erhalten die orthogonale Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^3$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ gegeben durch

$$v_1 = e_1,\ v_2 = e_2,\ v_3 = e_1 - e_2 + e_3.$$

Normalisierung liefert die Orthonormalbasis $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$ gegeben durch

$$w_1 = e_1,\ w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_2,\ w_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 + e_3).$$

Betrachte die Matrix

$$Q = (w_1|w_2|w_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Es folgt aus der Lösung zu Aufgabe 2, Serie 6, dass

$$A = (Q^{-1})^T Q^{-1},$$

und man berechnet

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

4. **"$\Rightarrow$":** Wir machen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen W ist ausgeartet. Dann existiert ein $w \in W \setminus \{0\}$ mit $\beta(w, w') = 0$ für alle $w' \in W$. Per definitionem folgt daraus $w \in W^\perp$ und somit $W \cap W^\perp \neq \{0\}$, im Widerspruch zur Annahme $V = W \oplus W^\perp$.

"$\Leftarrow$": Wir zeigen zuerst, dass $W \cap W^\perp = \{0\}$. Angenommen dies ist nicht wahr, dann existiert ein $w \in W \cap W^\perp$ mit $w \neq 0$. Da $W \in W^\perp$, gilt $\beta(w, w') = 0$ für alle $w' \in W$. Insbesondere ist β ausgeartet.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass $V = W + W^\perp$. Sei $v \in V$ beliebig und betrachte die Abbildung $\beta(v, \cdot) : V \to \mathbb{K}$. Die Restriktion von $\beta(v, \cdot)$ auf W definiert ein Element in W^*. Wie in Serie 7, Aufgabe 6c, argumentiert wurde, existiert also ein $w \in W$, sodass $\beta(v, w') = \beta(w, w')$ für alle $w' \in W$ gilt. Insbesondere ist also

$$\forall w' \in W : \beta(v - w, w') = \beta(v, w') - \beta(w, w') = 0$$

und folglich $v - w \in W^\perp$, i.e. es existiert $u \in W^\perp$ mit $v - w = u$ und folglich $v = w + u \in W + W^\perp$.

Bitte wenden!

5. **a)** A und B sind orthogonal diagonalisierbar, d.h. es existieren orthogonale Matrizen $Q_1, Q_2 \in O(n)$, sodass $Q_1^T A Q_1$ und $Q_2^T B Q_2$ Diagonalmatrizen sind. Da A, B positiv definit sind, sind die Diagonaleinträge von $Q_1^T A Q_1$ und $Q_2 B Q_2$ strikt positiv. Da Q_1, Q_2 orthogonale Matrizen sind, ist A ähnlich zu $Q_1^T A Q_1$ und B ähnlich zu $Q_2^T B Q_2$. Da die Eigenwerte einer Matrix invariant sind unter Ähnlichkeit, sind die Eigenwerte von A und B insbesondere alle positiv.

Wir wissen aus Serie 2, Aufgabe 5, dass A und B simultan diagonalisierbar sind, d.h. es existiert eine Matrix $S \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, sodass $S^{-1}AS$ und $S^{-1}BS$ Diagonalmatrizen sind. Wieder sind die Diagonaleinträge von $S^{-1}AS$ und $S^{-1}BS$ genau die Eigenwerte von A bzw. von B, und insbesondere positiv. Also sind auch die Diagonaleinträge der Diagonalmatrix

$$(S^{-1}AS)(S^{-1}BS) = S^{-1}ABS$$

positiv und somit sind, wieder wegen Invarianz unter Ähnlichkeit, die Eigenwerte von AB alle positiv.

Da $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$, ist AB orthogonal diagonalisierbar, d.h. es existiert $Q \in O(n)$, sodass $Q^T ABQ$ eine Diagonalmatrix ist, und wieder sind die Diagonaleinträge alle positiv, wegen Invarianz unter Ähnlichkeit.

Sei nun $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dann ist

$$v^T ABv = (QQ^T v)^T AB(QQ^T v) = (Q^T v)^T Q^T ABQ(Q^T v) > 0.$$

b) (i) Aus der Definition eines inneren Produkts folgt, dass die Abbildung β_T linear ist im ersten Argument. Seien $v, w_1, w_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus der Symmetrie des inneren Produkts folgt

$$\begin{aligned}\beta_T(v, w_1 + \lambda w_2) =& \langle T(w_1 + \lambda w_2), v\rangle = \langle T(w_1) + \lambda T(w_2), v\rangle \\ =& \langle T(w_1), v\rangle + \lambda\langle T(w_2), v\rangle = \beta_T(v, w_1) + \lambda\beta_T(v, w_2).\end{aligned}$$

Somit ist β_T linear im zweiten Argument und insbesondere bilinear.

(ii) **“$\Leftarrow$”:** Wenn T selbstadjungiert ist, dann gilt für alle $v, w \in V$

$$\beta_T(v, w) \overset{\text{Def.}}{=} \langle v, Tw\rangle \overset{T=T^*}{=} \langle Tv, w\rangle \overset{\text{Symmetrie}}{=} \langle w, Tv\rangle \overset{\text{Def.}}{=} \beta_T(w, v)$$

wegen der Symmetrie des inneren Produkts.

“$\Rightarrow$”: Sei β_T symmetrisch, dann gilt für alle $v, w \in V$, dass

$$\begin{aligned}\langle T^* v, w\rangle &\overset{\text{Def.}}{=} \langle v, Tw\rangle \overset{\text{Def.}}{=} \beta_T(v, w) \overset{\text{Symmetrie}}{=} \beta_T(w, v) \\ &\overset{\text{Def.}}{=} \langle w, Tv\rangle \overset{\text{Symmetrie}}{=} \langle Tv, w\rangle.\end{aligned}$$

Somit gilt für alle $v, w \in V$, dass

$$\langle T^* v, w\rangle = \langle Tv, w\rangle$$

und wegen der Eindeutigkeit von T^* folgt $T = T^*$.

Siehe nächstes Blatt!

(iii) Wir wissen aus Teilaufgaben (i) und (ii), dass β_T linear ist im ersten Argument. Wir behaupten also, dass genau dann $\beta_T(v,v) > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$ und $\beta_T(v,w) = \beta_T(w,v)$ für alle $v, w \in V$ gelten, wenn eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, sodass $[T]_\mathcal{B}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix ist.

"⇒": Da die Abbildung $(v,w) \mapsto \langle v, w\rangle$ eine symmetrische, positiv definite Bilinearform ist, existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V sowie eine Diagonalmatrix D mit strikt positiven Einträgen auf der Diagonalen, sodass

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w\rangle = [v]_\mathcal{B}^T D[w]_\mathcal{B}.$$

Wir definieren die Basis $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$ von V durch $w_i = D_{ii}^{-\frac{1}{2}} v_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle w_i, w_j\rangle =&(D_{ii}D_{jj})^{-\frac{1}{2}}\langle v_i, v_j\rangle = (D_{ii}D_{jj})^{-\frac{1}{2}}[v_i]_\mathcal{B}^T D[v_j]_\mathcal{B}\\ =&(D_{ii}D_{jj})^{-\frac{1}{2}} e_i^T D e_j = \delta_{ij},\end{aligned}$$

und es folgt wegen der Bilinearität und der Eindeutigkeit der Darstellungsmatrix bezüglich $\mathcal{C}$, dass

$$\forall v, w \in V : \langle v, w\rangle = [v]_\mathcal{C}^T [w]_\mathcal{C}.$$

Insbesondere ist

$$\beta_T(v,w) = [v]_\mathcal{C}^T [T]_\mathcal{C} [w]_\mathcal{C}$$

und folglich ist β_T genau dann ein inneres Produkt, wenn $[T]_\mathcal{C}$ symmetrisch und positiv definit ist. Falls β_T ein inneres Produkt ist, folgt also, dass eine Basis $\mathcal{C}$ von V existiert, sodass $[T]_\mathcal{C}$ symmetrisch und positiv definit ist.

"⇐": Wir nehmen an, dass T selbstadjungiert ist und eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, sodass $B := [T]_\mathcal{B}$ symmetrisch und positiv definit ist. Da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt ist, existiert eine symmetrische, positiv definite Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, sodass

$$\forall v, w \in V : \langle v, w\rangle = [v]_\mathcal{B}^T A[w]_\mathcal{B}.$$

Es gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}[v]_\mathcal{B}^T AB[w]_\mathcal{B} =&[v]_\mathcal{B}^T A[Tw]_\mathcal{B} = \langle v, Tw\rangle \overset{T=T^*}{=} \langle Tv, w\rangle\\ =&[Tv]_\mathcal{B}^T A[w]_\mathcal{B} = [v]_\mathcal{B}^T B^T A[w]_\mathcal{B} = [v]_\mathcal{B}^T BA[w]_\mathcal{B}.\end{aligned}$$

Dies impliziert, dass $AB = BA$ gilt, denn die Surjektivität von $v \mapsto [v]_\mathcal{B}$ impliziert

$$(BA)_{ij} = e_i^T BAe_j = e_i^T ABe_j = (AB)_{ij}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$. Da A, B positiv definit sind, ist also AB positiv definit, was in Aufgabe a) gezeigt wurde, und es folgt

$$\forall v \in V \setminus \{0\} : \beta_T(v,v) = \langle v, Tv\rangle = [v]_\mathcal{B}^T AB[v]_\mathcal{B} > 0.$$

Somit ist β_T ein inneres Produkt.