Serie 8:
Quadratische Formen, Sylvesters Trägheitssatz

1. Bestimmen Sie die Quadriken in $\mathbb{R}^3$.

2. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, in dem $2 \neq 0$ gilt, und sei $Q : V \to \mathbb{K}$.

a) Zeigen Sie, dass (i) und (ii) äquivalent sind:

(i) Es gelten:

I. $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ für alle $v \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, d.h. Q ist homogen vom Grad 2.

II. Die Abbildung $\beta_Q : V \times V \to \mathbb{K}$,

$$\beta_Q(v, w) := \frac{1}{2}\big(Q(v + w) - Q(v) - Q(w)\big),$$

ist bilinear.

(ii) Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V und eine symmetrische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, sodass gilt

$$\forall v \in V : Q(v) = [v]_{\mathcal{B}}^T A [v]_{\mathcal{B}}.$$

Bemerkung: Im Folgenden bezeichnen wir mit einer quadratischen Form auf V eine Abbildung $Q : V \to \mathbb{K}$, die eine dieser äquivalenten Eigenschaften erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass die Menge der quadratischen Formen auf V ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(V, \mathbb{K})$ ist und dass die Abbildung $Q \mapsto \beta_Q$ einen Isomorphismus zwischen dem Vektorraum der quadratischen Formen auf V und dem Vektorraum der symmetrischen Bilinearformen auf $V \times V$ definiert.

Bitte wenden!

$^\heartsuit$**3.** Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis der quadratischen Form

$$Q(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Zeigen Sie auf zwei Arten, dass A positiv definit ist und berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung.

$^\heartsuit$**4.** Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform. Ein Unterraum $W \subset V$ heisst nicht ausgeartet, falls $\beta|_{W\times W}$ nicht ausgeartet ist.

Sei $W \subset V$ ein Unterraum und definiere

$$W^\perp := \{v \in V \mid \forall w \in W : \beta(v, w) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $V = W \oplus W^\perp$ genau dann gilt, wenn W ein nicht ausgearteter Unterraum ist.

5. **a)** Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, positiv definit, sodass $AB = BA$ gilt. Zeigen Sie, dass AB positiv definit ist.

b) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und definiere die Abbildung $\beta_T : V \times V \to \mathbb{R}$ durch $\beta_T(v, w) := \langle v, Tw\rangle$.

(i) Zeigen Sie, dass β_T bilinear ist.

(ii) Zeigen Sie, dass β_T genau dann symmetrisch ist, wenn T selbstadjungiert ist.

(iii) Sei V endlichdimensional. Zeigen Sie, dass β_T genau dann ein inneres Produkt ist, wenn T selbstadjungiert ist und eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, sodass $[T]_\mathcal{B}$ symmetrisch und positiv definit ist.

6. Online-Abgabe

1. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, positiv definit. Dann ist $\mathrm{tr}(A) > 0$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Siehe nächstes Blatt!

2. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, sodass $A_{ij} > 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Dann ist A positiv definit.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, positiv definit. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) A^2 ist positiv definit.

(b) A^{-1} ist positiv definit.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

4. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine Diagonalmatrix. Dann ist A kongruent zu jeder anderen Diagonalmatrix, mit denselben Diagonaleinträgen (bis auf Permutation der Indizes).

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Bitte wenden!

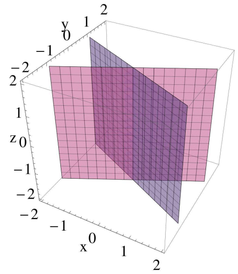
5. Sei β die Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\beta((x,y,z),(x',y',z')) = xx' - 4yy'.$$

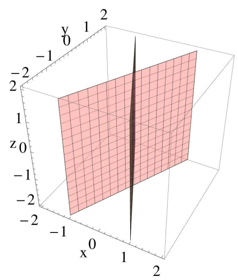
Sei Q die durch β induzierte quadratische Form auf $\mathbb{R}^3$, d.h. $Q(v) = \beta(v,v)$. Welches der folgenden Bilder gibt eine Darstellung der Quadrik

$$X_{Q,0} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Q(v) = 0\}?$$

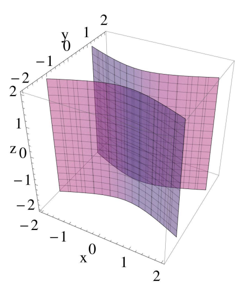
(a) 1



(b) 2



(c) 3



Siehe nächstes Blatt!

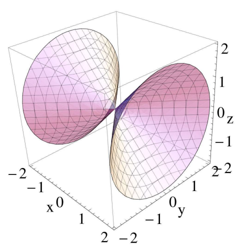
6. Sei β die Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\beta((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + yy' - zz'.$$

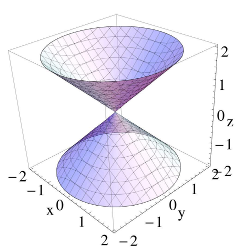
Sei Q die durch β induzierte quadratische Form. Welches der folgenden Bilder gibt eine Darstellung der Quadrik

$$X_{Q,0} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Q(v) = 0\}?$$

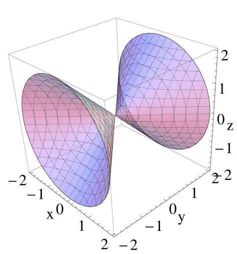
(a) 1



(b) 2



(c) 3



Bitte wenden!

7. Betrachte die quadratische Form auf $\mathbb{Q}^2$ gegeben durch

$$Q(x,y) = x^2 + 2y^2 = (x,y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

Im Folgenden sei $A = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{smallmatrix}\right)$. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^2$, und sei B die Darstellungsmatrix von Q bezüglich $\mathcal{B}$. Also gilt $B = R^T AR$, wobei $R = [I_{\mathbb{Q}^2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}_2$ nach $\mathcal{B}$ ist.

(a) Es gilt immer $\det(A) = \det(B)$.

(b) Es gibt $\lambda \in \mathbb{Q}$, mit $\det(A) = \lambda^2 \det(B)$.

(c) Es gibt $\mathcal{B}'$, sodass $Q(x,y) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, wobei $(\tilde{x},\tilde{y})$ die Koordinaten von (x,y) bezüglich $\mathcal{B}'$ sind.

8. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Betrachte auf $\mathbb{K}^2$ die quadratische Form $Q(x,y) = x^2 - 2y^2$. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^2$, sodass für die Koordinaten $(\tilde{x},\tilde{y})$ von (x,y) bezüglich $\mathcal{B}$ gilt:

(a) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$?

(b) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

(c) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

(d) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

(e) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

9. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Betrachte auf $\mathbb{K}^2$ die quadratische Form $Q(x,y) = xy$. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$, sodass für die Koordinaten $(\tilde{x},\tilde{y})$ von (x,y) bezüglich $\mathcal{B}$ gilt

(a) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

(b) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

(c) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

(d) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 24. April in der Übungsstunde oder davor im Fach Ihrer Assistentin/Ihres Assistenten im HG J 68.


Frohe Ostern