

Lösung 9: Quadratische Formen, Singulärwertzerlegung

1. Wir wissen, dass eine Basis \mathcal{B} von \mathbb{R}^n existiert, sodass

$$[\beta_Q]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0_{n-p-q} \end{pmatrix}$$

gilt. Da nach Annahme β_Q nicht ausgeartet ist, gilt $n = p + q$, da ansonsten für den eindeutigen Vektor $v \in V$ mit $[v]_{\mathcal{B}} = e_{p+q+1}$ folgt $\beta_Q(v, w) = 0$ für alle $w \in \mathbb{R}^n$, im Widerspruch zur Annahme.

Wir behaupten, dass $m = \min\{p, q\}$ die maximale Dimension eines vollständig isotropen Unterraumes ist und dass ein vollständig isotroper Unterraum der Dimension m existiert.

Zuerst zeigen wir, dass tatsächlich ein vollständig isotroper Unterraum der Dimension m existiert. Wir geben zuerst eine Skizze des Beweises um die Behauptung zu rechtfertigen. Im Anschluss liefern wir eine genaue Musterlösung. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ die eindeutig bestimmten Elemente, sodass $[v]_{\mathcal{B}} = e_1$ sowie $[w]_{\mathcal{B}} = e_{p+1}$ gelten. Dann ist

$$\begin{aligned} \beta_Q(v + w, v + w) &= \beta_Q(v, v) + 2\beta_Q(v, w) + \beta_Q(w, w) \\ &= e_1^T e_1 + 2e_1^T e_{p+1} - e_{p+1}^T e_{p+1} = 0. \end{aligned}$$

Somit ist $\text{span}(v + w)$ ein vollständig isotroper Unterraum von V . Wir definieren nun den Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ durch $U = \text{span}(v + w, v - w)$ und schreiben $\tilde{v} = v + w$ und $\tilde{w} = v - w$. Man beachte, dass $\beta_Q(\tilde{v}, \tilde{w}) = 2$ und insbesondere $\beta_Q|_{U \times U}$ nicht ausgeartet ist. Es gilt $\dim U = 2$, und jeder maximale, vollständig isotrope Unterraum von U ist eindimensional, denn jeder 0-dimensionale Unterraum ist gleich $\{0\}$ und somit in einem eindimensionalen, vollständig isotropen Unterraum – bspw. $\text{span}(\tilde{v})$ – enthalten, und jeder zweidimensionale Unterraum von U ist gleich U und

Bitte wenden!

weil $\beta_Q|_{U \times U} \neq 0$ nicht vollständig isotrop. Da $\beta_Q|_{U \times U}$ nicht ausgeartet ist, folgt aus Aufgabe 4 in Serie 8, dass $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$ gilt. Wir können zeigen, dass auf U^\perp die Bilinearform β_Q die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} I_{p-1} & \\ & -I_{q-1} \end{pmatrix}$$

besitzt. Nun machen wir auf dieselbe Art und Weise auf \mathbb{R}^{n-2} zwei weiter und entfernen wieder ein Paar \tilde{v}, \tilde{w} mit den entsprechenden Eigenschaften, bis entweder $p = 0$ oder $q = 0$ gilt. Auf dem verbliebenen orthogonalen Komplement ist die quadratische Form definit, und somit enthält dieser Unterraum keinen vollständig isotropen Unterraum mehr. Alle vorangegangenen, abgespaltenen Unterräume liefern je einen eindimensionalen, vollständig isotropen Unterraum und es folgt, dass ein vollständig isotroper Unterraum der Dimension $\min\{p, q\}$ existiert.

Wir verwenden Induktion über m . Wenn $p = 0$ (oder $q = 0$) ist, dann ist Q positiv (bzw. negativ) definit, und insbesondere ist kein nicht trivialer Unterraum vollständig isotrop. Insbesondere gilt die Behauptung im Falle $m = 0$. Angenommen, die Aussage stimmt für $m - 1$. Da der Fall $m = 0$ bereits bewiesen ist, können wir also annehmen, dass $pq \neq 0$. Wir wählen eine Basis $v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q$ von \mathbb{R}^n , sodass $\beta_Q(v_i, v_j) = \delta_{ij}$, $\beta_Q(w_k, w_l) = -\delta_{kl}$ und $\beta_Q(v_i, w_l) = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq p$, $1 \leq k, l \leq q$. Wir zeigen, dass die Restriktion von β_Q auf den Unterraum

$$W_1 := \text{span}\{v_1 + w_1, v_1 - w_1\}$$

nicht ausgeartet ist. Man berechnet

$$\begin{aligned} \beta_Q(v_1 + w_1, v_1 + w_1) &= 0 \\ \beta_Q(v_1 - w_1, v_1 + w_1) &= \beta_Q(v_1 + w_1, v_1 - w_1) = 2 \\ \beta_Q(v_1 - w_1, v_1 - w_1) &= 0 \end{aligned}$$

und somit ist die Darstellungsmatrix von $\beta_Q|_{W_1 \times W_1}$ bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B}_1 := (v_1 + w_1, v_1 - w_1)$ von W_1 invertierbar (mit Determinante -4). Insbesondere ist die Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $x \mapsto [\beta_Q|_{W_1 \times W_1}]_{\mathcal{B}_1} x$ surjektiv. Angenommen es ist $w \in W_1 \setminus \{0\}$, dann ist $[w]_{\mathcal{B}_1} \neq 0$. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}^2$, sodass $[w]_{\mathcal{B}_1}^T [\beta_Q|_{W_1 \times W_1}]_{\mathcal{B}_1} x \neq 0$ und insbesondere ein $w' \in W_1$, sodass

$$0 \neq [w]_{\mathcal{B}_1}^T [\beta_Q|_{W_1 \times W_1}]_{\mathcal{B}_1} x = [w]_{\mathcal{B}_1}^T [\beta_Q|_{W_1 \times W_1}]_{\mathcal{B}_1} [w']_{\mathcal{B}_1} = \beta_Q(w, w').$$

Aus Aufgabe 4, Serie 8, wissen wir, dass $\mathbb{R}^n = W_1^\perp \oplus W_1$ gilt. Da

$$\mathcal{B}_1^* := (v_2, \dots, v_p, w_2, \dots, w_q)$$

eine Basis von W_1^\perp ist, besitzt $\beta_Q|_{W_1^\perp \times W_1^\perp}$ die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} I_{p-1} & \\ & -I_{q-1} \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir wissen, dass jeder vollständig isotrope Unterraum von W_1^\perp maximaler Dimension die Dimension $m - 1$ hat. Sei $U \subset W_1^\perp$ ein solcher Unterraum. Da $U \subset W_1^\perp$ ist, ist $U + \text{span}\{v_1 + w_1\}$ ein vollständig isotroper Unterraum von V . Seien nämlich $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist für $\tilde{v} := v_1 + w_1$

$$Q(u + \lambda\tilde{v}) = \beta_Q(u + \lambda\tilde{v}, u + \lambda\tilde{v}) = \beta_Q(u, u) + 2\lambda\beta_Q(u, \tilde{v}) + \lambda^2\beta_Q(\tilde{v}, \tilde{v}) = 0,$$

da $u \in W_1^\perp$ und nach Definition von U und $v_1 + w_1$. Somit ist $U + \mathbb{R}\tilde{v}$ ein vollständig isotroper Unterraum mit Dimension m . Dies beweist, dass \mathbb{R}^n einen vollständig isotropen Unterraum der Dimension m besitzt.

Es verbleibt zu zeigen, dass m eine maximale Dimension ist. Wir definieren $V^+ := \text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$ und $V^- := \text{span}\{w_1, \dots, w_q\}$. Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum von Dimension $r > p$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \dim(W \cap V^-) &= \dim(W) + \dim(V^-) - \dim(W + V^-) \\ &\geq \dim(W) + \dim(V^-) - \dim(\mathbb{R}^n) \\ &= r + q - n > 0 \end{aligned}$$

Insbesondere enthält $W \cap V^-$ ein von Null verschiedenes Element $v \in V^-$. Auf V^- ist aber β_Q nach Voraussetzung negativ definit und somit gilt $Q(v) < 0$. Somit ist W nicht vollständig isotrop. Dies zeigt, dass jeder vollständig isotrope Unterraum Dimension $r \leq p$ hat. Analog sei nun $W \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum von Dimension $r > q$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \dim(W \cap V^+) &= \dim(W) + \dim(V^+) - \dim(W + V^+) \\ &\geq \dim(W) + \dim(V^+) - \dim(\mathbb{R}^n) \\ &= r + q - n > 0 \end{aligned}$$

Insbesondere enthält $W \cap V^+$ ein von Null verschiedenes Element $v \in V^+$. Auf V^+ ist aber β_Q nach Voraussetzung positiv definit und somit gilt $Q(v) < 0$. Somit ist W nicht vollständig isotrop. Dies zeigt, dass jeder vollständig isotrope Unterraum Dimension $r \leq q$ hat. Beides zusammen impliziert, dass jeder vollständig isotrope Unterraum Dimension $r \leq \min\{p, q\}$ besitzt.

2. a) Sei $A = RDQ^T$ mit $Q \in O(n)$ und $R \in O(m)$ eine Singulärwertzerlegung von A . Dann ist

$$A^T A = (QD^T R^T)(RDQ^T) = QD^T DQ^T$$

und somit $D^T D$ ähnlich zu $A^T A$. Man beachte, dass

$$(D^T D)_{ij} = \sum_{k=1}^m D_{ki} D_{kj} = \delta_{ij} D_{ii} D_{jj}$$

Bitte wenden!

und somit ist $D^T D$ eine Diagonalmatrix. Da $D^T D$ ähnlich ist zu $A^T A$, sind die Diagonaleinträge genau die Eigenwerte von $A^T A$ und somit durch $A^T A$ eindeutig bestimmt. Da die Einträge von D alle nicht-negativ sind, sind die Wurzeln eindeutig bestimmt und somit die Einträge von D durch A vollständig bestimmt.

- b)** Wenn A symmetrisch positiv definit ist, dann ist A orthogonal diagonalisierbar, d.h. es gibt $Q \in O(n)$ und eine Diagonalmatrix D , sodass $QDQ^T = A$. Mittels Konjugation von D durch Elementarmatrizen vom Typ I können wir D in eine Diagonalmatrix D' überführen, deren Diagonaleinträge absteigend geordnet sind. Angenommen $D' = P^{-1}DP$ für P ein Produkt von Permutationsmatrizen (Elementarmatrizen vom Typ I). Weil für eine Elementarmatrix R vom Typ I die Gleichungen $RR = I_n$ und $R^T = R$ gelten, ist $R \in O(n)$ und somit $P \in O(n)$. Also ist $D = PD'D^T$ und folglich $A = QDQ^T = (QP)D'(QP)^T$. Da A positiv definit ist, sind die Diagonaleinträge von D' alle positiv, und somit ist $QD'Q^T = A$ eine Singulärwertzerlegung. Da die Diagonaleinträge von D' genau die Eigenwerte von A sind, stimmen die Singulärwerte mit den Eigenwerten überein.
- c)** Aus dem ersten Spektralsatz wissen wir, dass B orthogonal diagonalisierbar ist, mit positiven Diagonaleinträgen. Jede Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen besitzt eine eindeutige diagonale, positiv definite Quadratwurzel, und somit ist $B = (Q^T \sqrt{D} Q)^2$ für ein $Q \in O(n)$.

Für die Eindeutigkeit seien also ganz allgemein A, B symmetrische, positiv definite Matrizen, sodass $A^2 = B$. Wir behaupten, dass wir eine Basis (v_1, \dots, v_n) von V sowie positive Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ finden können, sodass $Av_i = \lambda_i v_i$ gilt und v_i, λ_i durch B vollständig bestimmt sind. Dadurch ist A vollständig bestimmt, da die Matrizen $M = (v_1 \mid \dots \mid v_n)$ sowie $\tilde{M} = (\lambda_1 v_1 \mid \dots \mid \lambda_n v_n)$ invertierbar sind.

Da B symmetrisch, positiv definit ist, existiert eine ONB (v_1, \dots, v_n) von V , bestehend aus Eigenvektoren von B zu strikt positiven Eigenwerten μ_i . Definiere $\lambda_i = \sqrt{\mu_i}$. Wir zeigen, dass v_i ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_i ist. Sei $v = Av_i - \lambda_i v_i$, dann ist

$$Av = A^2 v_i - \lambda_i Av_i = \mu_i v_i - \lambda_i Av_i = -\lambda_i (Av_i - \lambda_i v_i) = -\lambda_i v$$

und wegen $\lambda_i > 0$ folgt $v = 0$. Ansonsten wäre v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $-\lambda_i < 0$, was unmöglich ist, da A positiv definit ist und somit alle Eigenwerte strikt positiv sind.

- d)** Da A symmetrisch, positiv definit ist, ist auch A^2 symmetrisch, positiv definit. Sei $A = RDQ^T$ eine Singulärwertzerlegung von A . Aus der Symmetrie folgt $A = A^T = QDR^T$ und somit $A^2 = (RDQ^T)^2$ und $A^2 = (QDQ^T)^2$. Aus vorangehender Teilaufgabe folgt, dass $RDQ^T = QDQ^T$, was wegen der Invertierbarkeit von Q und D impliziert, dass $Q = R$.

Siehe nächstes Blatt!

3. a) Wir berechnen die Matrix

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\text{char}_{A^T A}(X) = \det \begin{pmatrix} 2-X & -1 \\ -1 & 2-X \end{pmatrix} = X^2 - 4X + 3 = (X-3)(X-1).$$

Es folgt, dass die Matrix $A^T A$ die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$ besitzt. Die Singulärwerte von A sind also $\sigma_1 = \sqrt{3}$ und $\sigma_2 = 1$ und die Matrix D ist gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren von $A^T A$ zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 sind gegeben durch

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvektoren von Q sind gegeben durch die Eigenvektoren von $A^T A$, also erhalten wir

$$Q^T = (v_1 \mid v_2)^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichung $AQ = RD$ folgt nach Rechtsmultiplikation mit Q , dass für $i = 1, 2$ die i -te Spalte von R gleich $\frac{1}{\sigma_i}$ -mal der i -ten Spalte von AQ ist. Wir haben also $R = (w_1 \mid w_2 \mid w_3)$ mit

$$w_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und einem beliebigen Vektor w_3 , sodass (w_1, w_2, w_3) eine Orthonormalbasis ist. Durch Anwenden des Gram-Schmidt Algorithmus, zum Beispiel auf die Basis (w_1, w_2, e_1) mit $e_1 = (1, 0, 0)^T$, wählen wir

$$w_3 = \frac{1}{\|e_1 - \langle e_1, w_1 \rangle w_1 - \langle e_1, w_2 \rangle w_2\|} (e_1 - \langle e_1, w_1 \rangle w_1 - \langle e_1, w_2 \rangle w_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es folgt $A = RDQ^T$, wobei

$$R = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

b) Die Transponierte einer orthogonalen Matrix ist wieder orthogonal. Somit ist $A^T = QD^T R^T$ eine mögliche gesuchte Zerlegung, und da wir bereits gezeigt haben, dass die Singulärwerte der Matrix A^T durch A^T vollständig bestimmt sind, macht es Sinn, diese Zerlegung als *die* gesuchte Zerlegung zu bezeichnen.

4. a) Wir gehen vor wie im Beweis der Existenz der Singulärwertzerlegung einer Matrix. Sei $T^* : W \rightarrow V$ die adjungierte zu T , d.h. für alle $v \in V$ und $w \in W$ gilt

$$\langle Tv, w \rangle_W = \langle v, T^*w \rangle_V.$$

Die Abbildung T^*T ist selbstadjungiert, denn für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt

$$\langle T^*Tv_1, v_2 \rangle_V = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle_W = \langle v_1, T^*Tv_2 \rangle_V.$$

Wir wissen, dass jeder selbstadjungierte Operator orthogonal diagonalisierbar ist, d.h. es existiert eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V bestehend aus Eigenvektoren von T^*T . Im Folgenden sei λ_i der zu v_i gehörende Eigenwert. Man beachte

$$\lambda_i = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle_V = \langle T^*Tv_i, v_i \rangle_V = \langle Tv_i, Tv_i \rangle_V \geq 0.$$

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Sei $r = \text{Rang}(T^*T)$, dann ist $\lambda_i = 0$ genau dann, wenn $i > r$ ist. Beachten Sie, dass $\text{Rang}(T) = \text{Rang}(T^*T)$ ist, was in Aufgabe 5 von Serie 5 gezeigt wurde. Wir behaupten, dass die Bilder von v_i unter T orthogonal sind. Tatsächlich ist

$$\langle Tv_i, Tv_j \rangle_W = \langle T^*Tv_i, v_j \rangle_V = \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle_V = \lambda_i \delta_{ij}$$

wie gewünscht. Dies zeigt auch, dass $\text{Im}(T) = \text{span}\{Tv_1, \dots, Tv_r\}$ ist, da letztere erzeugende Menge orthogonal ist und $\|Tv_i\|_W = \sqrt{\lambda_i} \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq r$. Wir definieren w_1, \dots, w_r durch $w_i := \frac{1}{\|Tv_i\|_W} Tv_i$ und ergänzen diese orthonormale Menge zu einer ONB $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ von W . Es gilt für alle $v \in V$, dass

$$Tv = T \left(\sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle_V v_i \right) = \sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle_V Tv_i = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} \langle v, v_i \rangle_V w_i.$$

Somit folgt die Behauptung mit $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

b) Sei $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ eine Matrix und seien $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ ONB von \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m , sodass

$$L_A v = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v, v_i \rangle w_i \quad (v \in \mathbb{R}^n),$$

Siehe nächstes Blatt!

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das standard innere Produkt auf \mathbb{R}^n ist. Dann ist

$$[L_A v_j]_{\mathcal{C}} = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v_j, v_i \rangle_V [w_i]_{\mathcal{C}} = \begin{cases} \sigma_j e_j & \text{falls } 1 \leq j \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit folgt für die Matrix $D \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ mit

$$D_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & \text{falls } 1 \leq i = j \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Gleichung

$$D = [L_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [I_{\mathbb{R}^m}]_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{C}} [L_A]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m} [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n} = \tilde{R} A \tilde{Q}^T,$$

wobei $\tilde{R} = [I_{\mathbb{R}^m}]_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{C}}$ und $\tilde{Q}^T = [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n}$. Wir bemerken, dass $[I_{\mathbb{R}^m}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_m} = (w_1 \mid \cdots \mid w_m)$ und $[I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n} = (v_1 \mid \cdots \mid v_n)$ gilt. Insbesondere sind \tilde{R} und \tilde{Q}^T orthogonal, und somit

$$A = \tilde{R}^T D \tilde{Q} = R D Q^T,$$

wobei wir $Q = \tilde{Q}^T$ und $R = \tilde{R}^T$ setzen. Die Einträge von D sind alle nicht-negativ, und mittels symmetrischer Anwendung von elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen vom Typ I können wir die Diagonaleinträge von D wie gewünscht (d.h. absteigend) anordnen. Da Elementarmatrizen vom Typ I orthogonal sind, folgt die Behauptung.

c) Seien $v \in V$ und $w \in W$, dann ist

$$\langle T v, w \rangle_W = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v, v_i \rangle_V \langle w, w_i \rangle = \left\langle v, \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle w, w_i \rangle_W v_i \right\rangle_V,$$

und folglich ist

$$T^* w = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle w, w_i \rangle_W v_i.$$

d) Wir behaupten, dass \mathcal{C} eine Orthonormalbasis bestehend aus Eigenvektoren ist. Sei $1 \leq i \leq r$, dann ist

$$T T^* w_i = T T^* \left(\frac{1}{\sigma_i} T v_i \right) = \frac{1}{\sigma_i} T (T^* T v_i) = \frac{\lambda_i}{\sigma_i} T v_i = \lambda_i w_i,$$

und insbesondere ist w_i ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i . Andererseits ist für alle $r < i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$

$$\langle T^* w_i, v_j \rangle_V = \langle w_i, T v_j \rangle = 0,$$

und folglich $T^* w_i = 0$. Insbesondere ist w_i ein Eigenvektor zum Eigenwert 0 von $T T^*$. Es folgt, dass \mathcal{C} eine ONB bestehend aus Eigenvektoren ist.

Bitte wenden!

e) Man berechnet

$$\|Tv\|_W^2 = \left\| \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v, v_i \rangle_V w_i \right\|_W^2 = \sum_{i=1}^r (\sigma_i \langle v, v_i \rangle_V)^2 \|w_i\|_W^2 = \sum_{i=1}^r \lambda_i \langle v, v_i \rangle_V^2.$$

Insbesondere ist

$$\frac{\|Tv\|_W^2}{\|v\|_V^2} = \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i \langle v, v_i \rangle_V^2}{\sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle_V^2} \leq \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle_V^2}{\sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle_V^2} = \sigma_1^2$$

und das Maximum wird für den Vektor v_1 angenommen.

Andererseits ist

$$\frac{\|Tv\|_W^2}{\|v\|_V^2} = \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i \langle v, v_i \rangle_V^2}{\sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle_V^2} \geq \lambda_r \frac{\sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle_V^2}{\sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle_V^2} = \sigma_r^2$$

und der Wert wird angenommen für $v = v_r$.

Wenn $r < n$, dann ist $\text{Ker}(T) \neq 0$, und somit existiert ein $v \in V \setminus \{0\}$, sodass $\frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} = 0$. Es folgt

$$\max_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} = \sigma_1 \text{ und } \min_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} = \begin{cases} \sigma_r & \text{falls } r = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$