Serie 9:
Quadratische Formen, Singulärwertzerlegung

1. Sei Q eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$. Ein Unterraum $W \subset \mathbb{R}^n$ heisst *isotrop*, wenn ein Vektor $w \in W \setminus \{0\}$ existiert, sodass $Q(w) = 0$ gilt. Der Unterraum heisst *vollständig isotrop*, wenn $Q(w) = 0$ für alle $w \in W$ gilt.

Sei Q eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$ und sei die assoziierte symmetrische Bilinearform β_Q nicht ausgeartet. Bestimmen Sie die maximale Dimension eines vollständig isotropen Unterraumes.

2. $^\heartsuit$**a)** Zeigen Sie, dass die Singulärwerte einer Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ durch A eindeutig bestimmt sind.

b) Zeigen Sie, dass die Singulärwerte einer positiv definiten, symmetrischen Matrix mit ihren Eigenwerten übereinstimmen.

c) Zeigen Sie: jede symmetrische, positiv definite Matrix $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ besitzt eine eindeutige symmetrische, positiv definite Quadratwurzel A, d.h. $A^2 = B$.

Hinweis: Konstruieren Sie unter Verwendung von B eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A zu von 0 verschiedenen Eigenwerten.

d) Sei $A = RDQ^T$ die Singulärwertzerlegung einer positiv definiten, symmetrischen Matrix. Zeigen Sie, dass $R = Q$.

3. a) Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

b) Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung von A^T.

4. Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlichdimensionale Euklidische Vektorräume und $n = \dim V$, $m = \dim W$. Die Singulärwertzerlegung von $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ist ein Tupel bestehend aus geordeten Orthonormalbasen $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ von V und W sowie $\sigma \in \mathbb{R}^m$, sodass

$$\forall v \in V : Tv = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \langle v, v_i\rangle_V w_i,$$

wobei $v_i = 0$ für $i > n$.

$^\heartsuit$**a)** Zeigen Sie, dass jeder Homomorphismus $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ eine Singulärwertzerlegung besitzt.

b) Verwenden Sie die Existenz der Singulärwertzerlegung von Homomorphismen, um die Existenz der Singulärwertzerlegung von Matrizen zu beweisen.

c) Sei eine Singulärwertzerlegung von $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ wie oben gegeben. Finden Sie eine Formel für T^* abhängig von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ und geben Sie eine Singulärwertzerlegung von T^* an.

d) Finden Sie eine Orthonormalbasis von W bestehend aus Eigenvektoren von TT^*.

e) Bestimmen Sie $\|Tv\|_W$ für $v \in V$ in Abhängigkeit von der Singulärwertzerlegung von T. Bestimmen Sie $\max\{\frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} \mid v \in V \setminus \{0\}\}$ sowie $\min\{\frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} \mid v \in V \setminus \{0\}\}$.

5. Online-Abgabe

1. Die Darstellungsmatrix einer symmetrischen Bilinearform ist symmetrisch.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Siehe nächstes Blatt!

2. Jede symmetrische Matrix ist kongruent zu einer Diagonalmatrix.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Die Summe zweier symmetrischer bilinearformen ist eine symmetrische Bilinearform.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. Je zwei symmetrische Matrizen mit demselben charakteristischen Polynom sind Darstellungsmatrizen derselben Bilinearform.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

5. Die Singulärwerte eines linearen Operators sind mit seinen Eigenwerten identisch

(a) Richtig.

(b) Falsch.

6. Die Singulärwerte der Matrix A sind identisch mit den Eigenwerten der Matrix $A^T A$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

7. Sei A eine symmetrische Matrix, und sei λ ein Eigenwert von A. Dann ist λ ein Singulärwert von A.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Dienstag, den 2. Mai, vor 09:00 Uhr, im Fach Ihrer Assistentin/Ihres Assistenten im HG J 68.