

Lösung 10: Klassifikation orthogonaler Endomorphismen

1. Sei T eine Reflexion, und sei $v \in V$ normiert (i.e. $\|v\| = 1$), sodass $T|_{\{v\}^\perp} = I_{\{v\}^\perp}$. Um zu zeigen, dass T orthogonal ist, zeigen wir, dass $T^{-1} = T^*$, da T^{-1} besonders leicht zu bestimmen ist. Alternativ könnte man auch direkt überprüfen, dass T die definierende Eigenschaft einer orthogonalen Abbildung besitzt. Nach Anwendung des Gram-Schmidt Verfahrens auf $\{v\}^\perp$ existiert eine ONB (v_1, \dots, v_n) von V , sodass

$$T(v_i) = \begin{cases} -v_i & \text{falls } i = 1 \\ v_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falls $i = 1$, dann ist

$$\langle T(v_i), v_j \rangle = -\langle v_i, v_j \rangle = -\delta_{ij} = \langle v_i, T(v_j) \rangle.$$

Andernfalls ist

$$\langle T(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \langle v_i, T(v_j) \rangle.$$

Somit ist $T^* = T$. Andererseits ist $T^2(v_i) = v_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ und folglich $T^* = T^{-1}$ wie gewünscht.

Sei nun T eine Rotation. Sei $W = \text{span}\{v_1, v_2\}$, wobei (v_1, v_2) eine ONB von W ist, und sei

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \cos \vartheta v_1 + \sin \vartheta v_2 \\ T(v_2) &= -\sin \vartheta v_1 + \cos \vartheta v_2 \end{aligned}$$

sowie $T|_{W^\perp} = I_{W^\perp}$. Nach Anwendung von Gram-Schmidt auf W^\perp erhalten wir eine ONB $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V , sodass $T(v_i) = v_i$ für alle $2 < i \leq n$. Insbesondere ist

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Es folgt

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}}^T [T]_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \vartheta + (-1)^2 \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} = I_n. \end{aligned}$$

Da \mathcal{B} eine ONB von V ist, folgt

$$[T^*]_{\mathcal{B}} \stackrel{(\mathcal{B} \text{ ONB})}{=} [T]_{\mathcal{B}}^T = [T]_{\mathcal{B}}^{-1} \stackrel{([ST]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}})}{=} [T^{-1}]_{\mathcal{B}}$$

und folglich ist $T^* = T^{-1}$, da $[\cdot]_{\mathcal{B}} : \text{End}(V) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ injektiv ist. Also ist T orthogonal.

2. a) Sei \mathcal{B} eine ONB von V , dann gilt $[T]_{\mathcal{B}}^T [T]_{\mathcal{B}} = I_2$. Sei $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann folgt

$$I_2 = [T]_{\mathcal{B}}^T [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere existieren $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$, sodass

$$a = \cos \varphi, b = \sin \psi, c = \sin \varphi, d = \cos \psi.$$

Zudem ist

$$\begin{aligned} 0 &= ab + cd = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \\ &= \sin(\varphi + \psi) \end{aligned}$$

und folglich $\psi = -\varphi + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $k \in \{0, 1\}$ ist. Falls $\psi = -\varphi$, dann ist

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist mit $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ folglich

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \cos \varphi v_1 + \sin \varphi v_2, \\ T(v_2) &= -\sin \varphi v_1 + \cos \varphi v_2. \end{aligned}$$

Somit ist T eine Rotation.

Andernfalls ist

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Das charakteristische Polynom von T ist also

$$\text{char}_T(X) = -(\cos \varphi - X)(\cos \varphi + X) - \sin^2 \varphi = X^2 - 1$$

und somit sind die Eigenwerte von T gleich 1 und -1 .

Da $[T]_{\mathcal{B}}$ symmetrisch ist, ist andererseits $[T]_{\mathcal{B}}$ orthogonal diagonalisierbar, d.h. es existiert eine orthogonale Matrix $Q \in O(2)$, sodass

$$Q^T [T]_{\mathcal{B}} Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

und da Eigenwerte invariant sind unter Ähnlichkeit, gilt o.B.d.A. $1 = \lambda_1 = -\lambda_2$. Da Q invertierbar ist, ist $Q = [I_V]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ für eine Basis \mathcal{C} von V . Insbesondere folgt also wegen $Q^T = Q^{-1}$, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Q^T [T]_{\mathcal{B}} Q = [T]_{\mathcal{C}}$$

und somit ist T eine Reflexion.

Obige Rechnung zeigt auch folgendes: Wenn T eine Reflexion ist, dann ist $\det(T) = -1$ (setze $X = 0$). Falls andererseits T keine Reflexion ist, dann ist T wie gezeigt eine Rotation, und es folgt

$$\det(T) = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Also ist $\det(T) = -1$ genau dann, wenn T eine Reflexion ist. Analog argumentiert man dass $\det(T) = 1$ genau dann gilt, wenn T eine Rotation ist.

b) Seien S eine Rotation und T eine Reflexion. Dann ist

$$\det(ST) = \det(TS) = \det(T) \det(S) = -1$$

und somit sind ST und TS nach Teilaufgabe a) Reflexionen.

3. Nach Umbenennung der Unterräume können wir annehmen, dass $1 \leq k \leq m$ so gewählt ist, dass $\dim(W_i) = 1$ genau dann gilt, wenn $1 \leq i \leq k$ ist. Im Folgenden seien $r = m - k$. Nach Voraussetzung ist $\dim(V) = k + 2r$. Sei $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k, v_1, w_1, \dots, v_r, w_r)$ eine ONB von V , sodass

$$W_i = \begin{cases} \text{span}\{u_i\} & \text{falls } 1 \leq i \leq k \\ \text{span}\{v_{i-k}, w_{i-k}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Bitte wenden!

in T -invariante Unterräume, sodass für alle $1 \leq i \leq k'$ gilt $\dim(W'_i) = 1$ und für alle $k' < i \leq m'$ gilt $\dim(W'_i) = 2$ und $T|_{W'_i}$ ist eine Rotation.

Im Folgenden gehen wir, zwecks Effizienz der Notation, davon aus, dass die Zerlegung von Anfang an so gewählt war. Wir wollen nun zeigen, dass Punkt 2 der Aussage für eine Zerlegung von V und Restriktion von T auf die in der Zerlegung auftauchenden Unterräume erfüllt ist. Die anderen Punkte folgen dann relativ leicht, wie wir am Schluss argumentieren werden. Sei

$$I = \{1 \leq i \leq k \mid T|_{W_i} \text{ ist eine Reflexion}\}$$

und $J = \{1, \dots, k\} \setminus I$. Auf einem eindimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum ist jede lineare Abbildung von der Form $v \mapsto \lambda v$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$ und es ist $\det(v \mapsto \lambda v) = \lambda$. Insbesondere ist

$$T|_{W_i} = \begin{cases} I_{W_i} & \text{falls } i \in J \\ -I_{W_i} & \text{falls } i \in I \end{cases}$$

Falls $I = \emptyset$, dann ist Punkt 2 der Aussage erfüllt. Sei also $I \neq \emptyset$. Die Idee ist wie folgt: Seien $i_1, i_2 \in I$, dann ist $T|_{W_{i_1} \oplus W_{i_2}} = -I_{W_{i_1} \oplus W_{i_2}}$ eine Rotation um Winkel π . Wir fassen so viele Paare wie möglich zusammen und erhalten am Schluss maximal ein i , worauf $T|_{W_i}$ noch eine Reflexion ist.

Formaler argumentiert, können wir nach Umbenennung annehmen, dass $I = \{1, \dots, l\}$ für ein $1 \leq l \leq k$ und $J = \{l+1, \dots, k\}$. Sei

$$r = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{falls } l \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{l-1}{2} & \text{sonst} \end{cases}$$

und definiere für $1 \leq i \leq r$ den Unterraum $W'_i = W_{2i} \oplus W_{2i+1}$. Diese Unterräume sind paarweise orthogonale Unterräume von $W_1 \oplus \dots \oplus W_l$ und somit ist

$$\dim(W'_1 \oplus \dots \oplus W'_r) = l - 1$$

und $T|_{W'_i}$ ist eine Rotation. Es gilt

$$V = W_1 \oplus W'_1 \oplus W'_r \oplus W_{l+1} \oplus \dots \oplus W_m,$$

und $T|_{W_i}$ ist eine Rotation für alle $l < i \leq m$ nach Voraussetzung. Nach Umbenennung haben wir also eine Zerlegung

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$$

gefunden, sodass $T|_{W_1}$ eine Reflexion ist, und $T|_{W_i}$ für alle $1 < i \leq m$ eine Rotation ist.

Bitte wenden!

Es bleibt, explizit die T_i zu konstruieren und zu zeigen, dass alle Aussagen gelten. Sei $1 \leq i \leq m$, dann definieren wir T_i durch

$$T_i|_{W_j} = \begin{cases} T|_{W_i} & \text{falls } j = i \\ I_{W_j} & \text{sonst} \end{cases}$$

und diese Abbildungen sind alle wohldefiniert, da V die direkte Summe der W_j ist. Formaler wählt man eine ONB $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k, v_1, w_1, \dots, v_r, w_r)$ von V wie oben, d.h.

$$W_i = \begin{cases} \text{span}\{u_i\} & \text{falls } \dim(W_i) = 1 \\ \text{span}\{v_{i-k}, w_{i-k}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

und definiert $T_i(u_j) = T|_{W_i}(u_j)$ falls $i = j$ und $T_i(u_j) = u_j$ sonst u.s.w. für v_j, w_j .

Punkt 1 der Aussage folgt aus der Konstruktion und ebenfalls nach Konstruktion ist keine der Abbildungen T_2, \dots, T_m eine Reflexion und somit gilt Punkt 2 der Aussage. Punkt 3 folgt aus der Tatsache, dass $T_i T_j|_{W_k} = T_j T_i|_{W_k}$ für alle $1 \leq k \leq m$ gilt, da die Identität mit allen Endomorphismen kommutiert. Teil 4 gilt aufgrund der Tatsache, dass nach Konstruktion

$$\forall v \in \mathcal{B} : T_1 \cdots T_m(v) = T(v),$$

denn $T_1 \cdots T_m(v) = T|_{W_i}(v)$ für das eindeutige $1 \leq i \leq m$ mit $v \in W_i$, und aufgrund der Tatsache, dass jede lineare Abbildung durch ihre Wirkung auf einer Basis vollständig bestimmt ist. Punkt 5 folgt aus

$$\det(T) = \det(T_1) \cdots \det(T_m) = \det(T_1)$$

nach Punkt 2.

- b)** Sei $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$ wie in Teilaufgabe a) gewählt, d.h. $T|_{W_i}$ ist eine Rotation für alle $1 < i \leq m$. Wir betonen an dieser Stelle, dass nach Definition die einzige Rotation auf einem eindimensionalen Vektorraum die Identität ist. Man beachte, dass für je zwei eindimensionale Unterräume W_{i_1}, W_{i_2} worauf die Restriktionen $T|_{W_{i_1}}$ bzw. $T|_{W_{i_2}}$ Rotationen sind, auch $W_{i_1} \oplus W_{i_2}$ ein Unterraum ist, worauf $T|_{W_{i_1} \oplus W_{i_2}}$ eine Rotation ist (da die Identität eine Rotation ist). Folglich können wir annehmen, dass $\dim(W_i) = 2$ für alle $2 < i \leq m$ ist, wobei wir W_2 ausschließen, da wir nicht wissen, ob $\dim(W_2 \oplus \cdots \oplus W_m)$ gerade ist. Im Folgenden seien $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ ONB von W_1, \dots, W_m . Wir wissen aus der Vorlesung, dass die geordnete Menge $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m$ erhalten aus "Aneinanderhängen" der Basen eine ONB von V ist. Es gilt nach Teilaufgabe a)

$$[T]_{\mathcal{B}} = [T_1]_{\mathcal{B}} \cdots [T_m]_{\mathcal{B}}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^m \begin{pmatrix} I_{\dim(W_1 \oplus \dots \oplus W_{i-1})} & 0 & 0 \\ 0 & [T|_{W_i}]_{\mathcal{B}_i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\dim(W_{i+1} \oplus \dots \oplus W_m)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & [T|_{W_m}]_{\mathcal{B}_m} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Da die $T|_{W_2}, \dots, T|_{W_m}$ alles Rotationen sind, und da wir angenommen haben, dass $\dim(W_i) = 2$ für alle $i > 2$, wissen wir aus Aufgabe 2., dass

$$[T|_{W_i}]_{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_i & -\sin \vartheta_i \\ \sin \vartheta_i & \cos \vartheta_i \end{pmatrix}$$

für ein $\vartheta_i \in \mathbb{R}$ gilt. Falls $\dim(W_2) = 2$, dann gilt dieselbe Aussage auch für $[T|_{W_2}]_{\mathcal{B}_2}$. Andernfalls ist $\dim(W_2) = 1$ und somit folgt $[T|_{W_2}]_{\mathcal{B}_2} = (1)$ wegen $\det(T|_{W_2}) = 1$. Schliesslich gilt es noch folgende Fälle zu unterscheiden: Falls $T|_{W_1}$ eine Rotation ist, dann gelten dieselben Aussagen auch für $[T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1}$, andernfalls ist nach Konstruktion $\dim(W_1) = 1$ und somit $[T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1} = (-1)$. All diese Fälle zusammen beweisen die Aussage.

Nach Konstruktion sind alle 1×1 -Diagonalblöcke gleich 1, ausser möglicherweise $[T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1}$. Dieser Block ist genau dann nicht gleich 1, wenn $T|_{W_1}$ eine Reflexion ist und somit folgt die Aussage aus der Tatsache

$$\det(T) = \det([T]_{\mathcal{B}}) = \det([T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1}) \cdots \det([T|_{W_m}]_{\mathcal{B}_m}) = \det([T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1}).$$

- c) Per definitionem ist $O(3) \subset M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ die Menge der Matrizen A , sodass L_A eine orthogonale Abbildung ist. Aus Aufgabe 4. wissen wir, dass für jedes $A \in O(3)$ eine ONB \mathcal{B} von \mathbb{R}^3 existiert, sodass

$$A = [L_A]_{\mathcal{E}_3} \sim [L_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

ist, wobei \sim das Symbol für Ähnlichkeit sei und $\lambda \in \{\pm 1\}$ und $a^2 + b^2 = 1$ ist. Es folgt, dass ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $a = \cos \vartheta$ und $b = \sin \vartheta$ ist. Falls $A \in SO(3)$ ist, dann folgt aus

$$\det(A) = \det([L_A]_{\mathcal{B}}) = \lambda(a^2 + b^2) = \lambda,$$

dass $\lambda = 1$ ist, und folglich ist A ähnlich zu einer Matrix

$$[L_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

5. L_A und L_B sind Rotationen, weil bspw. L_A eine Rotation auf dem zweidimensionalen Unterraum $\text{span}\{e_2, e_3\}$ definiert und das orthogonale Komplement $\text{span}\{e_1\}$ fixiert. Da L_A, L_B orthogonale Abbildungen sind, ist auch $L_A L_B = L_{AB}$ eine orthogonale Abbildung. Es ist $\det(L_{AB}) = \det(L_A) \det(L_B) = \det(A) \det(B) = 1$. Aus Aufgabe 4. folgt, dass eine ONB \mathcal{B} von \mathbb{R}^3 existiert, sodass

$$[L_{AB}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

ist. Wegen $\lambda = \det(L_{AB}) = 1$ ist $\lambda = 1$ und somit L_{AB} eine Rotation. Es bleibt, die neue Rotationsachse explizit zu bestimmen.

Hierfür sei im Folgenden $a = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$AB = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ a^2 & a^2 & -a \\ a^2 & a^2 & a \end{pmatrix}.$$

Um eine Rotationsachse zu bestimmen, finden wir einen Eigenvektor zum Eigenwert 1, d.h. wir lösen das homogene Gleichungssystem $Cx = 0$, wobei

$$C = \begin{pmatrix} a-1 & -a & 0 \\ a^2 & a^2-1 & -a \\ a^2 & a^2 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Der Rest ist eine Rechnung. Wir gehen im Folgenden so vor, dass die resultierenden Ausdrücke so lange wie möglich sehr einfach bleiben. So benötigen wir zwar mehr Schritte, aber die Rechnung ist nicht sehr fehleranfällig. Wir verwenden die ganze Zeit, dass $a^2 = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} & C \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 - Z_2} \begin{pmatrix} a-1 & -a & 0 \\ a^2 & a^2-1 & -a \\ 0 & 1 & 2a-1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{Z_2 \rightarrow Z_2 - (a^2-1)Z_3} \begin{pmatrix} a-1 & -a & 0 \\ a^2 & 0 & a^2-1 \\ 0 & 1 & 2a-1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{Z_1 \rightarrow Z_1 - \frac{1}{a^2}(a-1)Z_2} \begin{pmatrix} 0 & -a & a-1 \\ a^2 & 0 & a^2-1 \\ 0 & 1 & 2a-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{Z_1 \rightarrow Z_1 + aZ_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & a^2 - 1 \\ 0 & 1 & 2a - 1 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{Z_2 \rightarrow \frac{1}{a^2}Z_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2a - 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Also lautet das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
x_1 + 0x_2 - x_3 &= 0 \\
0x_1 + x_2 + (2a - 1)x_3 &= 0
\end{aligned}$$

und wir erhalten als Lösungsmenge den Unterraum

$$W = \{t(1, 1 - \sqrt{2}, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Nach Konstruktion ist W ein Eigenraum zum Eigenwert 1 für L_{AB} und somit eine Rotationsachse für die Rotation L_{AB} .

6. a) Man bemerkt, dass das Aufheben des Balles und – nach Ablauf der ersten Halbzeit – das erneute am selben Ort Ablegen des Balles die Distanzen der Punkte auf der Oberfläche sowie das Zentrum des Balles erhält.

Unter Verwendung des angegebenen Theorems finden wir eine orthogonale Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, sodass wir den Ball zu Beginn der ersten Halbzeit mit S^2 und zu Beginn der zweiten Halbzeit mit $T(S^2)$ identifizieren können. Wir wissen aus Aufgabe 4., dass T eine Komposition von Rotationen und maximal einer Reflexion ist.

Es ist klar, dass man nicht eine Reflexion auf einen Fussball anwenden kann, ohne ihn dabei zu zerstören. Jede orthogonale Abbildung auf \mathbb{R}^3 die ein Produkt ausschliesslich von Rotationen ist, besitzt einen Eigenvektor $v \in S^2$ zum Eigenwert 1 wegen Aufgabe 4. b). Insbesondere sind also $T(v) = v$ und $T(-v) = -v$ zwei Punkte auf dem Fussball, die nach Ablauf der ersten Halbzeit wieder auf sich selber zu liegen kommen.

- b) Man berechnet

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 &= \langle v - w, v - w \rangle \\
&= \|v - w\|^2 \\
&= \|f(v) - f(w)\|^2 \\
&= \langle f(v) - f(w), f(v) - f(w) \rangle \\
&= \|f(v)\|^2 - 2\langle f(v), f(w) \rangle + \|f(w)\|^2 \\
&= \|v\|^2 - 2\langle f(v), f(w) \rangle + \|w\|^2
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

und folglich ist

$$\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle.$$

Wir sollten an dieser Stelle betonen, dass $\|f(v)\| = \|v\|$ nicht eine Konsequenz der isometrischen Eigenschaft von f ist, sondern eine Konsequenz der Voraussetzung $f : S^2 \rightarrow S^2$ ist, denn daraus folgt $\|v\| = 1 = \|f(v)\|$.

- c) Es folgt aus Teilaufgabe b), dass das Bild von \mathcal{E}_3 unter f eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 ist. Folglich gilt nach Teilaufgabe b)

$$f(v) = \sum_{i=1}^3 \langle f(v), f(e_i) \rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^3 \langle v, e_i \rangle f(e_i).$$

Die Abbildung $v \mapsto T(v) = \sum_{i=1}^3 \langle v, e_i \rangle f(e_i)$ ist auf ganz \mathbb{R}^3 definiert und linear und liefert eine lineare Fortsetzung von f auf ganz \mathbb{R}^3 . Zudem ist jede lineare Fortsetzung durch $T(e_i) = f(e_i)$ vollständig bestimmt. Es bleibt also nur zu zeigen, dass T orthogonal ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle T(v), T(w) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^3 \langle v, e_i \rangle f(e_i), \sum_{j=1}^3 \langle w, e_j \rangle f(e_j) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \langle v, e_i \rangle \langle w, e_j \rangle \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \langle v, e_i \rangle \langle w, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^3 \langle v, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^3 \langle w, e_j \rangle e_j \right\rangle = \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

und somit ist T orthogonal.

- d) Wir wissen, dass die Erweiterung T eine Komposition von Rotationen und maximal einer Reflexion ist. Wie in der Beweisskizze erklärt, kann in der Zerlegung von T keine Reflexion vorkommen, ausser der Ball wird zerstört (was implizit ausgeschlossen ist). Aus Aufgabe 4. b) wissen wir, dass eine ONB \mathcal{B} von \mathbb{R}^3 existiert, sodass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

ist. Da T ein Produkt von Rotationen ist, gilt

$$1 = \det(T) = \lambda(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = \lambda$$

und somit besitzt T einen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ zum Eigenwert 1. Es sind $\frac{v}{\|v\|}, -\frac{v}{\|v\|} \in S^2$ ebenfalls Eigenvektoren von T zum Eigenwert 1, die in S^2 liegen, und also folgt die Behauptung.