Serie 10: Klassifikation orthogonaler Endomorphismen

1. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidscher Vektorraum. Zeigen Sie, dass Rotationen und Reflexionen auf V orthogonale Abbildungen sind.

2. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum der Dimension $\dim(V) = 2$. Zeigen Sie:

a) Jeder orthogonale Endomorphismus T auf V ist entweder eine Reflexion oder eine Rotation. Zeigen Sie zudem:

- T ist genau dann eine Reflexion, wenn $\det(T) = -1$,
- T ist genau dann eine Rotation, wenn $\det(T) = 1$.

b) Die Komposition einer Rotation und einer Reflexion ist eine Reflexion.

3. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum und sei T ein orthogonaler Endomorphismus auf V. Angenommen $\{W_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ ist eine Familie paarweise orthogonaler T-invarianter Unterräume von V, sodass

1. $1 \leq \dim(W_i) \leq 2$ für $1 \leq i \leq m$
2. sowie $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$.

Sei $s = |\{1 \leq i \leq m \mid T|_{W_i} \text{ ist eine Reflexion}\}|$. Zeigen Sie, dass $\det(T) = (-1)^s$ gilt.

4. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidscher Vektorraum und sei T ein orthogonaler Endomorphismus auf V.

Bitte wenden!

a) Zeigen Sie, dass orthogonale Endomorphismen $T_1, \dots, T_m$ auf V existieren, sodass gelten:

1. Für alle $1 \leq i \leq m$ ist T_i entweder eine Rotation oder eine Reflexion,
2. es gibt maximal ein $1 \leq i \leq m$, sodass T_i eine Reflexion ist,
3. für alle $1 \leq i, j \leq m$ gilt $T_i T_j = T_j T_i$,
4. $T = T_1 \cdots T_m$, und
5. es ist

$$\det(T) = \begin{cases} 1 & \text{falls } T_i \text{ eine Rotation ist für alle } 1 \leq i \leq m \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Zeigen Sie: Es existiert eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass die Darstellungsmatrix von T bezüglich $\mathcal{B}$ eine Blockdiagonalmatrix der Form

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_m \end{pmatrix}$$

ist, wobei für alle $1 \leq i \leq m$ die Matrix D_i entweder eine 1×1-Matrix (± 1) oder eine 2×2-Matrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{smallmatrix}\right)$ mit $a_i^2 + b_i^2 = 1$ über $\mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie zudem, dass man im Falle $\det(T) = 1$ alle 1×1 Blockdiagonaleinträge gleich 1 wählen kann.

c) Sei $A \in \mathrm{SO}(3) = \{A \in \mathrm{O}(3) \mid \det(A) = 1\}$. Zeigen Sie, dass A ähnlich ist zu einer Matrix der Form

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

5. Seien $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}$ und seien gegeben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass L_A, L_B, L_{AB} Rotationen auf $\mathbb{R}^3$ sind und finden Sie die Rotationsachse von L_{AB}.

6. Zeigen Sie den Satz vom Fussball: In jedem Fussballspiel, in dem nur ein Ball verwendet wird, gibt es zwei Punkte auf der Oberfläche des Balles, die sich zu Beginn der ersten und der zweiten Halbzeit (wenn der Ball genau auf demselben Anstosspunkt liegt) an der gleichen Stelle im umgebenden Raum befinden.

Siehe nächstes Blatt!

a) Überlegen Sie sich eine Beweisskizze unter Verwendung der folgenden Tatsache, die wir im Folgenden beweisen werden:

Theorem: Sei $S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\}$, wobei $\|\cdot\|$ die Norm zum standard inneren Produkt auf $\mathbb{R}^3$ sei. Sei $f : S^2 \to S^2$ eine Isometrie, das heisst für alle $v, w \in S^2$ gilt

$$\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|.$$

Dann existiert ein durch f eindeutig bestimmter orthogonaler Endomorphismus $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass $f = T|_{S^2}$ ist.

b) Sei $f : S^2 \to S^2$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in S^2$ gilt

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

c) Sei $f : S^2 \to S^2$ eine Isometrie und sei $v \in S^2$. Geben Sie eine Formel für $f(v)$ an und folgern Sie, dass f eine eindeutige orthogonale Erweiterung auf ganz $\mathbb{R}^3$ besitzt.

d) Folgern Sie den Satz vom Fussball.

7. Online-Abgabe

1. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum und sei T ein orthogonaler Endomorphismus auf V. Dann ist T entweder eine Rotation oder eine Reflexion.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein zweidimensionaler Euklidscher Vektorraum. Die Komposition zweier Rotationen auf V ist eine Rotation.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein dreidimensionaler Euklidscher Vektorraum. Dann ist das Produkt zweier Rotationen auf V eine Rotation auf V.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein vierdimensionaler Euklidscher Vektorraum. Dann ist die Komposition zweier Rotationen eine Rotation.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

5. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Dann ist die Identität eine Rotation.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

6. Sei $(V, \langle,\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Die Komposition zweier Reflexionen auf V ist eine Reflexion.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

7. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum und T ein orthogonaler Endomorphismus auf V. Dann ist T eine Komposition von Rotationen.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Siehe nächstes Blatt!

8. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei T ein orthognaler Endomorphimus auf V und sei $\det(T) = -1$. Dann ist T eine Reflexion.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

9. Jede Reflexion eines endlichdimensionalen Euklidschen Vektorraums besitzt einen Eigenwert.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

10. Jede Rotation eines endlichdimensionalen Euklidschen Vektorraums besitzt einen Eigenwert.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 8. Mai, in der Übungsstunde oder davor im Fach Ihrer Assistentin/Ihres Assistenten im HG J 68.