Lösung 11:
Jordan Normalform

1. **a)** Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\mathrm{char}_A(X) = X^2(1-X)(\mathrm{i}-X)$$

und da es in Linearfaktoren zerfällt (was über $\mathbb{C}$ natürlich immer gilt), ist A ähnlich zu einer Matrix in Jordan Normalform. Gegeben das charakteristische Polynom von A existieren die folgenden beiden Kandidaten J_1, J_2 für die Jordan Normalform:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Die Frage ist also, ob der Eigenwert 0 geometrische Multiplizität 1 oder 2 besitzt, da für die anderen Eigenwerte die algebraische Multiplizität 1 eine obere Schranke für die von unten durch 1 beschränkte geometrische Multiplizität liefert und diese somit vollständig bestimmt. Die geometrische Multiplizität des Eigenwerts 0 ist die Dimension des Kerns von A.

Da der Rang unter Ähnlichkeit erhalten bleibt und weil $\mathrm{Rang}(A) = 2$ ist, folgt $A \sim J_2$.

b) Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{char}_A(X) =& (2-X)^3 + 2 - 3(2-X) \\ =& -X^3 + 6X^2 - 9X + 4 \end{aligned}$$

und somit

$$\mathrm{char}_A^{\mathbb{R}}(X) = -(X-1)^2(X-4),$$

Bitte wenden!

$$\mathrm{char}_A^{\mathbb{F}_3}(X) = -\,X^3 + 1 = -(X-1)^3,$$

im zweiten Falle weil $4 \equiv 1 \bmod 3$.

In beiden Fällen zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren und somit ist A über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_3$ äquivalent zu einer Matrix in Jordan Normalform.

Da alle Zeilen von $A - I_3$ identisch und von 0 verschieden sind, ist in beiden Fällen $\mathrm{Rang}(A - I_3) = 1$, und folglich ist $\dim \mathrm{Ker}(A - I_3) = 2$ sowohl für $\mathbb{R}$ als auch für $\mathbb{F}_3$. Es folgt

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{über } \mathbb{R}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{über } \mathbb{F}_3$$

2. Wir verwenden Theorem 5 aus §5.2: ein Endomorphismus $T \in \mathrm{End}(V)$ ist genau dann diagonalisierbar ist, wenn für alle $\lambda \in \sigma(T)$ gilt $\dim E_\lambda = m_\lambda(T)$, und $\sum_{\lambda \in \sigma(T)} m_\lambda(T) = \dim V$. Hier ist $m_\lambda(T)$ die algebraische Multiplizität von λ bezüglich T.

1. ⇒ 2.: Angenommen T ist diagonalisierbar, dann ist

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} E_\lambda \subset \bigoplus_{\Lambda \in \sigma(T)} K_\lambda \subset V$$

wegen $E_\lambda \subset K_\lambda$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$ und insbesondere

$$\dim(V) = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \dim(E_\lambda) \leq \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \dim(K_\lambda) \leq \dim(V).$$

Also ist $\dim(E_\lambda) = \dim(K_\lambda)$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$ und somit $E_\lambda = K_\lambda$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$.

2. ⇒ 1.: Aus der Annahme folgt $m_\lambda(T) = \dim K_\lambda = \dim E_\lambda$. Da $\mathrm{char}_T(X)$ nach Voraussetzung in Linearfaktoren zerfällt, ist $\sum_{\lambda \in \sigma(T)} m_\lambda(T) = \dim V$, sprich

$$\dim\Big(\bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} E_\lambda\Big) = \dim(V)$$

und also $\bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} E_\lambda = V$ und somit ist T diagonalisierbar.

Siehe nächstes Blatt!

3. Seien $v, w \in V \setminus \{0\}$ und $p, q \in \mathbb{N}$, sodass

$$\gamma_1 = \big((T-\lambda I)^{p-1}(v), \dots, v\big),$$
$$\gamma_2 = \big((T-\lambda I)^{q-1}(w), \dots, w\big),$$

und sei vorausgesetzt, dass $(T-\lambda I)^{q-1}(w) \neq (T-\lambda I)^{p-1}(v)$. Angenommen, die Aussage ist falsch, und $u \in \gamma_1 \cap \gamma_2$. Angenommen

$$u = (T-\lambda I)^k(v) = (T-\lambda I)^l(w)$$

mit $0 \leq k < p$ und $0 \leq l < q$. Für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt folglich

$$(T-\lambda I)^{k+r}(v) = (T-\lambda I)^r(u) = (T-\lambda I)^{l+r}(w).$$

Insbesondere folgt aus der Minimalität von p und q, dass $(T-\lambda I)^r(u) \neq 0$ genau dann, wenn $r < p-k$ bzw. $r < q-l$ und also ist $p-k = q-l$. Es folgt

$$(T-\lambda I)^{p-1}(v) = (T-\lambda I)^{p-k-1}(u) = (T-\lambda I)^{q-l-1}(w) = (T-\lambda I)^{q-1}(w),$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

4. **a)** Wir wissen, dass $\operatorname{char}_{L_A}(X) = \operatorname{char}_A(X)$ in Linearfaktoren zerfällt. Nach Korollar 1 in §9.2 wissen wir, dass eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^n$ existiert, sodass $[L_A]_{\mathcal{B}}$ in Jordan Normalform ist. Insbesondere ist

$$A = [L_A]_{\mathcal{E}_n} = [I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n}[L_A]_{\mathcal{B}}[I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{B}}$$

ähnlich zu einer Matrix in Jordan Normalform.

b) Wir verwenden die Notation aus Teilaufgabe a) Sei $k \in \mathbb{N}$, dann schreiben wir $N_k = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_{k-1} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_{k\times k}(\mathbb{K})$. Dann gilt $J_{k,\lambda} = \lambda I_k + N_k$ und da Diagonalmatrizen der Form αI_k mit allen Elementen in $M_{k\times k}(\mathbb{K})$ kommutieren, gilt

$$D_{k,\lambda}N_k = N_k D_{k,\lambda},$$

wobei $D_{k,\lambda} = \lambda I_k$. Nach Wahl von $\mathcal{B}$ existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ sowie $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sodass

$$[L_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_{k_1,\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{k_m,\lambda_m} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} D_{k_1,\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_{k_m,\lambda_m} \end{pmatrix}}_{=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} N_{k_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & N_{k_m} \end{pmatrix}}_{N}$$

und es ist $DN = ND$, da das Produkt zweier Blockdiagonalmatrizen die Blockdiagonalmatrix mit den Produkten der entsprechenden Blöcke auf der Diagonalen ist.

Bitte wenden!

c) Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt jedes Polynom in $\mathbb{C}[X]$ in Linearfaktoren. Insbesondere ist jede Matrix ähnlich zu einer Matrix in Jordan Normalform. Sei $A = Q^{-1}JQ$ mit $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ und J in Jordan Normalform. Man beachte: A und A^T sind genau dann ähnlich, wenn J und J^T ähnlich sind, da Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist. Es reicht also, zu zeigen dass J und J^T für J in Jordan Normalform ähnlich sind. Da J und J^T Blockdiagonalmatrizen mit Jordanblöcken bzw. deren Transponierten auf der Diagonalen sind, reicht es, den allgemeinen Fall zu zeigen: Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $k \in \mathbb{N}$, dann sind $J_{k,\lambda}$ und $J_{k,\lambda}^T$ ähnlich. Falls $k = 1$, dann ist nichts zu zeigen. Sei also $k > 1$. Sei $\tilde{\mathcal{E}}_k$ die "umgekehrte" Standardbasis auf $\mathbb{K}^k$, d.h. $\tilde{\mathcal{E}}_k = (e_k, \dots, e_1)$, wobei $\mathcal{E}_k = (e_1, \dots, e_k)$ die Standardbasis ist. Dann ist die Basiswechselmatrix $Q = [I_{\mathbb{K}^k}]^{\tilde{\mathcal{E}}_k}_{\mathcal{E}_k}$ gegeben durch

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (e_k \mid \cdots \mid e_1).$$

Man berechnet

$$J_{k,\lambda}Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \lambda \\ \vdots & \iddots & \lambda & 0 \\ 1 & \iddots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = QJ_{k,\lambda}^T$$

und folglich ist $J_{k,\lambda} = Q^{-1}J_{k,\lambda}Q$ wie behauptet. Für die Rechnung beachte man, dass

$$\begin{aligned} (J_{k,\lambda}Q)_{ij} =& (J_{k,\lambda})_{(i)}Q^{(j)} \\ =& \begin{cases} (\lambda e_i^T + e_{i+1}^T)e_{k-j+1} & \text{falls } 1 \leq i < k \\ \lambda e_i^T e_{k-j+1} & \text{sonst} \end{cases} \\ =& \begin{cases} \lambda\delta_{i,k-j+1} + \delta_{i+1,k-j+1} & \text{falls } 1 \leq i < k \\ \lambda\delta_{i,k-j+1} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} (QJ_{k,\lambda}^T)_{ij} =& Q_{(i)}(J_{k,\lambda}^T)^{(j)} \\ =& \begin{cases} e_{k-i+1}^T(\lambda e_j + e_{j+1}) & \text{falls } 1 \leq j < k \\ e_{k-i+1}^T\lambda e_j & \text{sonst} \end{cases} \\ =& \begin{cases} \lambda\delta_{k-i+1,j} + \delta_{k-i+1,j+1} & \text{falls } 1 \leq j < k \\ \lambda\delta_{k-i+1,j} & \text{sonst} \end{cases} \\ =& \begin{cases} \lambda\delta_{i,k-j+1} + \delta_{i+1,k-j+1} & \text{falls } 1 \leq j < k \\ \lambda\delta_{i,k-j+1} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und man überprüft, dass für $1 \leq j < k$ aus $i = k - j$ auch $1 \leq i < k$ folgt und umgekehrt. Das beweist die Gleichheit.

d) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, dann ist $A = Q^{-1}JQ$ für $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ und $J \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ in Jordan Normalform.

Sei $k \in \mathbb{N}$, dann ist $A^k = (Q^{-1}JQ)^k = Q^{-1}J^kQ$, und folglich für beliebige $N \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} Q^{-1}\frac{J^k}{k!}Q = Q^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{J^k}{k!}\Big)Q.$$

In der Analysis wurde gezeigt, dass die Folge $S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{J^k}{k!}$ konvergiert. Andererseits ist die Abbildung $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mapsto Q^{-1}XQ$ stetig, da $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und die Abbildung linear in X ist. Es folgt

$$\exp(A) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} = Q^{-1}\Big(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{J^k}{k!}\Big)Q = Q^{-1}\exp(J)Q.$$

Schreibe $J = D + N$, wobei D eine Diagonalmatrix ist, und N eine strikte obere Dreiecksmatrix ist, sodass $DN = ND$ gilt. Wir finden

$$\begin{aligned}\exp(J) = \exp(D+N) &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} D^{k-l}N^l \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{D^k}{k!} + \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} D^{k-l}N^l\end{aligned}$$

wobei die Konvergenz des zweiten Summanden aus der Existenz von $\exp(D)$ und $\exp(J)$ folgt.

Beachte, dass für alle $r, s, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Matrix D^rN^s eine obere Dreiecksmatrix ist und dass aus $DN = ND$ folgt

$$(D^rN^s)^t = D^{rt}N^{st},$$

sodass D^rN^s für $s \geq 1$ nilpotent ist. Insbesondere ist D^rN^s eine strikte obere Dreiecksmatrix und somit auch $\frac{1}{k!}\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}D^{k-l}N^l$ für jedes $k \geq 0$, wobei wir hier die Konvention $\sum_{k\in\emptyset} a_k = 0$ verwenden. Also ist

$$\exp(J) = \exp(D) + M,$$

wobei $M \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Für eine Diagonalmatrix wissen wir

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

$$\Rightarrow \exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

und folglich ist $\exp(J)$ eine obere Dreiecksmatrix und die Diagonaleinträge von $\exp(J)$ sind Exponentiale der Eigenwerte von J (bzw. von A bzw. von D). Es folgt wegen der Invarianz der Determinante und der Spur unter Ähnlichkeit

$$\begin{aligned}\det(\exp(A)) &= \det(\exp(J)) = \det(\exp(D) + M) = \prod_{i=1}^{n} \exp(D)_{ii} \\ &= \prod_{i=1}^{n} e^{D_{ii}} = \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} D_{ii}\Big) = \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} (D+N)_{ii}\Big) \\ &= \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} J_{ii}\Big) = \exp(\operatorname{tr}(J)) = \exp(\operatorname{tr}(A)).\end{aligned}$$

Da $0 \notin \exp(\mathbb{C})$, folgt aus $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A)) \neq 0$, dass $\exp(A) \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$.

e) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Da nach Voraussetzung das charakteristische Polynom von A und somit von L_A in Linearfaktoren zerfällt, wissen wir, dass

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(L_A)} K_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} K_\lambda.$$

Des weiteren wissen wir, dass $\dim(K_\lambda) = m_\lambda(L_A) = m_\lambda(A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt. Wir wissen aus Theorem 5 und 7 in §9.2, dass $L_A|_{K_\lambda}$ eine Jordan Normalform besitzt, d.h. es existiert eine Basis $\mathcal{B}_\lambda$ von K_λ, sodass $[L_A|_{K_\lambda}]_{\mathcal{B}_\lambda}$ eine obere Dreiecksmatrix der Dimension $m_\lambda(L_A) \times m_\lambda(L_A)$ mit Diagonaleinträgen alle gleich λ ist. Insbesondere ist $\det(L_A|_{K_\lambda}) = \lambda^{m_\lambda(L_A)}$ und weil $\mathbb{K} = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(L_A)} K_\lambda$ eine Zerlegung in L_A-invariante Unterräume ist, folgt

$$\det(A) = \det(L_A) = \prod_{\lambda\in\sigma(L_A)} \lambda^{m_\lambda(L_A)} = \prod_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda^{m_\lambda(A)}.$$

5. **a)** Sei $\mathcal{B} = (p_0, \ldots, p_d)$ mit

$$p_k = \frac{1}{k!}X^k \quad (0 \le k \le d).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} D(p_0) &= 0 \quad \text{und} \\ D(p_k) &= \frac{k}{k!}X^{k-1} = p_{k-1} \quad (k > 0). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $[D]_{\mathcal{B}} = J_{d+1,0}$ in jordan Normalform.

Siehe nächstes Blatt!

b) Um $\exp(D)$ zu bestimmen, reicht es $\exp([D]_{\mathcal{B}})$ zu bestimmen. Aus obiger Rechnung folgt mittels Induktion, dass

$$D^l(p_k) = \begin{cases} 0 & \text{falls } l > k \\ p_{l-k} & \text{sonst} \end{cases}$$

und folglich ist

$$[D^l]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & I_{d+1-l} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1 \le l \le d).$$

Es folgt

$$\exp([D]_{\mathcal{B}}) = I_{d+1} + \sum_{l=1}^{d} \frac{1}{l!} \begin{pmatrix} 0 & I_{d+1-l} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{d!} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(d-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\exp([D]_{\mathcal{B}})_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k > l \\ \frac{1}{(l-k)!} & \text{sonst} \end{cases}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} p_0(X+1) =& p_0 \\ p_l(X+1) =& \frac{1}{l!}(X+1)^l = \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{l!} \binom{l}{k} X^k \\ =& \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{(l-k)!} p_k(X) \end{aligned}$$

und folglich gilt für Abbildung T gegeben durch $T(p(X)) = p(X+1)$, dass $[T]_{\mathcal{B}} = \exp([D_{\mathcal{B}}])$.

Andererseits ist die Abbildung $\mathrm{End}(P_d(\mathbb{R})) \to M_{d+1 \times d+1}(\mathbb{R})$, $S \mapsto [S]_{\mathcal{B}}$ ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum, und insbesondere stetig. Da für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} [D]_{\mathcal{B}}^k = \Big[\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k \Big]_{\mathcal{B}},$$

folgt aus der Stetigkeit

$$[\exp(D)]_{\mathcal{B}} = \exp([D]_{\mathcal{B}}) = [T]_{\mathcal{B}}$$

und somit $\exp(D) = T$ wegen Injektivität von $[\cdot]_{\mathcal{B}}$.

Bitte wenden!

c) Wegen vorangehender Diskussion wissen wir, dass für die Basis $\mathcal{B}$ gilt $\mathrm{char}_{[T]_\mathcal{B}}(X) = (1-X)^{d+1}$ und somit wissen wir, dass T über $\mathbb{R}$ eine Jordan Normalform $\mathbb{R}$ besitzt. In der Ausfgabenstellung wird vorweggenommen, dass ein Zyklus zu einem Eigenvektor existiert, der ganz $P_d(\mathbb{R})$ erzeugt, und dass dieser Eigenvektor bis auf skalare Vielfache eindeutig ist.

Wir behaupten, dass die folgende Basis die gewünschte Eigenschaft hat:

$$q_k(X) = \frac{1}{k!}\prod_{l=0}^{k-1}(X-l) \quad (0 \leq k \leq d),$$

wobei wir uns an die Konvention $\prod_{l\in\emptyset} a_l = 1$ halten.

Sei $k > 0$. Man berechnet für $n \in \mathbb{N}$

$$q_k(n) = \frac{1}{k!}\prod_{l=0}^{k-1}(n-l) = \binom{n}{k}.$$

Es gilt insbesondere

$$q_k(n+1) = \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = q_k(n) + q_{k-1}(n),$$

sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$T(q_k)(n) = q_k(n) + q_{k-1}(n),$$

und da zwei Polynome, die an unendlich vielen Stellen übereinstimmen, identisch sein müssen, folgt

$$T(q_k) = q_k + q_{k-1}.$$

Für $k = 0$ ist $q_k = 1$ und somit $T(q_k) = q_k$, wie gewünscht.

6. Da A in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ liegt, und da über $\mathbb{C}$ jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt, besitzt A über $\mathbb{C}$ eine Jordan Normalform $A = Q^{-1}JQ$ mit J in Jordan Normalform und $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$.

Sei m wie in der Aufgabenstellung, dann gilt

$$I_n = A^m = (Q^{-1}JQ)^m = Q^{-1}J^mQ$$

und folglich ist $J^m = I_n$. Es reicht also zu zeigen, dass jeder Jordanblock endlicher Ordnung Dimension 1×1 besitzt. Angenommen, der Jordanblock $J_{k,\lambda}$ habe endliche Ordnung $m \in \mathbb{N}$, d.h. $J_{k,\lambda}^m = I_k$, und es sei $k > 1$. Man beachte für das Folgende, dass $\lambda^{mk} = \det(J_{k,\lambda})^m = \det(J_{k,\lambda}^m) = 1$ und somit $\lambda \neq 0$ ist. Schreibe

$$J_{k,\lambda} = D_{k,\lambda} + N_k$$

Siehe nächstes Blatt!

mit $D_{k,\lambda} = \lambda I_k$ und $N_k = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_{k-1} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist

$$I_k = J_{k,\lambda}^m = D_{k,\lambda}^m + \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l} D^{m-l} N^l = \lambda^m I_k + \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l} \lambda^{m-l} N^l.$$

Man berechnet

$$N_k^l = \begin{pmatrix} 0 & I_{k-l} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit sind die Matrizen $N_k, \ldots, N_k^{k-1}$ paarweise verschieden und linear unabhängig und für $l \geq k$ ist $N_k^l = 0$, wie in §5.4, Proposition 3 gezeigt wurde. Da $\binom{m}{l}\lambda^{m-l} \neq 0$ gilt, ist also

$$0 = \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l} \lambda^{m-l} N^l = \sum_{l=1}^{k-1} \binom{m}{l} \lambda^{m-l} N^l,$$

im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $N_k, \ldots, N_{k-1}$. Es folgt, dass $k = 1$ sein muss.

Dies beweist, dass jeder Jordanblock endlicher Ordnung maximal die Dimension 1×1 besitzt und da die (existierende) Jordan Normalform einer Matrix endlicher Ordnung über $\mathbb{C}$ nur Jordanblöcke endlicher Ordnung enthält, ist die Jordan Normalform eine Diagonalmatrix und somit ist die ursprüngliche Matrix (also die Matrix A) diagonalisierbar.