Lösung 12:
(Hermitesche) Sesquilinearformen

1. **a)** Betrachte die Abbildung $M_{k\times l}(\mathbb{C}) \to M_{l\times k}(\mathbb{C})$, $X \mapsto X^* = \overline{X}^T$. Diese Abbildung ist konjugiert linear, d.h. für alle $X, Y \in M_{k\times l}(\mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$(X + \lambda Y)^* = X^* + \overline{\lambda} Y^*.$$

Dies folgt aus der Multiplikativität und der Additivität der komplexen Konjugation sowie der Linearität der Transposition, denn

$$\begin{aligned}(X + \lambda Y)^* =& \overline{X + \lambda Y}^T = (\overline{X} + \overline{\lambda}\,\overline{Y})^T \\ =& \overline{X}^T + \overline{\lambda}\,\overline{Y}^Y = X^* + \overline{\lambda} Y^*.\end{aligned}$$

Dies zusammen mit der Distributivität der Matrixmultiplikation liefert für $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, dass

$$\begin{aligned}\gamma(u_1 + \lambda u_2, v_1 + \mu v_2) =& (u_1 + \lambda u_2)^* A(v_1 + \mu v_2) = (u_1^* + \overline{\lambda} u_2^*)A(v_1 + \mu v_2) \\ =& u_1^* A v_1 + \overline{\lambda} u_2^* A v_1 + \mu u_1^* A v_2 + \overline{\lambda}\mu u_2^* A v_2 \\ =& \gamma(u_1, v_1) + \overline{\lambda}\gamma(u_2, v_1) + \mu\gamma(u_1, v_2) + \overline{\lambda}\mu\gamma(u_2, v_2).\end{aligned}$$

Dies beweist die definierenden Gleichungen für die Sesquilinearität nach Wahl von $u_2 = 0$ bzw. $v_2 = 0$ sowie $\lambda = 1$ bzw. $\mu = 1$.

b) **“$\Rightarrow$”:** Angenommen γ ist nicht degeneriert, dann existiert für jedes $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein $u \in \mathbb{C}^n$, sodass $u^* A v \neq 0$. Insbesondere ist $Av \neq 0$. Da $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ beliebig war, folgt $\mathrm{Ker}(L_A) = \{0\}$ und da $L_A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, folgt aus der Injektivität von L_A, dass L_A ein Isomorphismus ist, und somit insbesondere, dass A invertierbar ist.

"$\Leftarrow$": Um die umgekehrte Implikation zu beweisen, zeigen wir dazu äquivalent, dass wenn γ nicht nicht degeneriert ist, die Darstellungsmatrix nicht invertierbar sein kann. Nehmen wir also an γ ist nicht nicht degeneriert. Sei $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, sodass $\gamma(u, v) = 0$ gilt für alle $u \in \mathbb{C}^n$. Dann ist insbesondere $\gamma(Av, v) = 0$, und somit

$$0 = \gamma(Av, v) = (Av)^* Av = \|Av\|^2,$$

wobei $\|\cdot\|$ die Norm zum standard inneren Produkt auf $\mathbb{C}^n$ ist. Wie in der Vorlesung und insbesondere in der Analysis diskutiert wurde, folgt daraus $Av = 0$ und somit ist $v \in \operatorname{Ker}(L_A)$. Da $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ war, ist L_A nicht injektiv, insbesondere nicht invertierbar, und damit auch $A \notin \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$.

c) Wir bemerken, dass analog zur Diskussion von Bilinearformen die Gleichung

$$\gamma(u, v) = [u]_{\mathcal{B}}^* \psi_{\mathcal{B}}(\gamma)[v]_{\mathcal{B}}$$

gilt. Hierfür reicht es zu zeigen, dass die rechte Seite eine Sequilinearform auf V definiert, die auf einer Basis mit γ übereinstimmt. Angenommen, dies sei der Fall für eine geordnete Basis $\mathcal{B}' = (v_1', \ldots, v_n')$ von V, dann gilt für beliebige $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i'$ und $v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i'$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
[u]_{\mathcal{B}}^* \psi_{\mathcal{B}}(\gamma)[v]_{\mathcal{B}} =& \big[\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i'\big]_{\mathcal{B}}^* \psi_{\mathcal{B}}(\gamma) \big[\textstyle\sum_{j=1}^n \beta_j v_j'\big]_{\mathcal{B}} \\
=& \sum_{i,j=1}^n \overline{\alpha_i} \beta_j [v_i']^* \psi_{\mathcal{B}}(\gamma)[v_j']_{\mathcal{B}} = \sum_{i,j=1}^n \overline{\alpha_i} \beta_j \gamma(v_i' v_j') \\
=& \gamma\big(\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i', \sum_{j=1}^n \beta_j v_j'\big) = \gamma(u, v).
\end{aligned}$$

Wir wählen die Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, dann ist $[v_i]_{\mathcal{B}} = e_i$, wobei $\mathcal{E}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis auf $\mathbb{C}^n$ ist. Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, dann ist $e_i^* A e_j = A_{ij}$, und folglich

$$[v_i]_{\mathcal{B}}^* \psi_{\mathcal{B}}(\gamma)[v_j]_{\mathcal{B}} = \psi_{\mathcal{B}}(\gamma)_{ij} = \gamma(v_i, v_j)$$

nach Definition von $\psi_{\mathcal{B}}(\gamma)$.

Wir wenden uns nun dem Beweis der Aussage zu:

"$\Rightarrow$": Angenommen γ ist positiv definit, dann gilt für jede beliebige Basis $\mathcal{B}$ von V und für jedes $v \in V \setminus \{0\}$, dass

$$0 < \gamma(v, v) = [v]_{\mathcal{B}}^* \psi_{\mathcal{B}}(\gamma)[v]_{\mathcal{B}}.$$

Da die Abbildung $V \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$ surjektiv ist, folgt $x^* \psi_{\mathcal{B}}(\gamma) x > 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ und somit ist $\psi_{\mathcal{B}}(\gamma)$ positiv definit.

Siehe nächstes Blatt!

“$\Leftarrow$”: Angenommen es existiert eine geordnete Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, sodass $\psi_{\mathcal{B}}(\gamma)$ eine positiv definite Matrix ist, dann gilt wegen $[v]_{\mathcal{B}} \neq 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$, dass

$$0 < [v]_{\mathcal{B}}^* \psi_B(\gamma)[v]_{\mathcal{B}} = \gamma(v, v),$$

und folglich ist γ positiv definit.

2. Linearität des Riemannintegrals impliziert

$$\langle f_1 + \lambda f_2, g_1 + \mu g_2 \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle + \overline{\lambda}\langle f_2, g_1 \rangle + \mu \langle f_2, g_1 \rangle + \overline{\lambda}\mu \langle f_2, g_2 \rangle$$

für alle $f_1, f_2, g_1, g_2 \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, da punktweise $\overline{f_1(t) + \lambda f_2(t)} = \overline{f_1(t)} + \overline{\lambda}\,\overline{f_2(t)}$ gilt. Daraus folgt, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Sesquilinearform auf V definiert. Es bleibt zu zeigen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit und hermitesch ist.

Um zu zeigen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitesch ist, verwenden wir die Linearität des Integrals und erhalten für $f = f_r + \mathrm{i} f_i$, $g = g_r + \mathrm{i} g_i$, mit f_r, f_i, g_r, g_i reellwertig, dass

$$\begin{aligned}
\langle g, f \rangle =& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)\overline{f(t)} \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(g_r(t) + \mathrm{i} g_i(t)\big)\big(f_r(t) + \mathrm{i} f_i(t)\big) \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t)g_r(t) + f_i(t)g_i(t) + \mathrm{i} f_r(t)g_i(t) - \mathrm{i} f_i(t)g_r(t) \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t)g_r(t) + f_i(t)g_i(t) \mathrm{d}t + \mathrm{i}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t)g_i(t) - f_i(t)g_r(t) \mathrm{d}t \\
\overline{\langle f, g \rangle} =& \overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t)g_r(t) + f_i(t)g_i(t) \mathrm{d}t + \mathrm{i}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_i(t)g_r(t) - f_r(t)g_i(t) \mathrm{d}t} \\
=& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t)g_r(t) + f_i(t)g_i(t) \mathrm{d}t - \mathrm{i}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_i(t)g_r(t) - f_r(t)g_i(t) \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t)g_r(t) + f_i(t)g_i(t) \mathrm{d}t + \mathrm{i}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t)g_i(t) - f_i(t)g_r(t) \mathrm{d}t \\
=& \langle g, f \rangle.
\end{aligned}$$

Für die Tatsache, dass für stetige $f, g : [0, 2\pi]$ auch die Realteile f_r, g_r und die Imaginärteile f_i, g_i stetig sind, verweisen wir auf die Analysis Vorlesung, in der auch das Integral komplexwertiger stetiger Funktionen f aif einem kompakten Intervall I durch

$$\int_I f(t) \mathrm{d}t = \int_I \mathrm{Re}(f)(t) \mathrm{d}t + \mathrm{i} \int_I \mathrm{Im}(f)(t) \mathrm{d}t$$

definiert wurde.

Bitte wenden!

Für die Positivität sei $f \in V \setminus \{0\}$, dann existiert ein $t_0 \in [0, 2\pi]$, sodass $f(t_0) \neq 0$. Da f stetig ist, existiert $\delta > 0$, sodass

$$\forall t \in [0, 2\pi] : \, |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \frac{|f(t_0)|}{2}$$

und insbesondere folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung für $t \in [0, 2\pi]$ mit $|t - t_0| < \delta$, dass

$$|f(t)| \geq \big||f(t_0)| - |f(t_0) - f(t)|\big| \geq \frac{|f(t_0)|}{2} > 0.$$

Im Folgenden seien $t_- = \max\{0, t_0 - \delta\}$ und $t_+ = \min\{2\pi, t_0 + \delta\}$. Aus der Monotonie des Riemannintegrals folgt

$$2\pi\langle f, f\rangle = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \geq \int_{t_-}^{t_+} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \geq \frac{|f(t_0)|^2}{4}(t_+ - t_-) > 0.$$

3. a) Es gilt $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$, und da die Abbildung $z \mapsto \overline{z}$ $\mathbb{R}$-linear ist, ist auch Re $\mathbb{R}$-linear. Insbesondere folgt also

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle u_1 + \lambda u_2, v_1 + \mu v_2\rangle =& \mathrm{Re}\big(\langle u_1, v_1\rangle + \lambda\langle u_2, v_1\rangle + \mu\langle u_1, v_2\rangle + \lambda\mu\langle u_2, v_2\rangle\big) \\ =& \mathrm{Re}\langle u_1, v_1\rangle + \lambda\mathrm{Re}\langle u_2, v_1\rangle + \mu\mathrm{Re}\langle u_1, v_2\rangle + \lambda\mu\mathrm{Re}\langle u_2, v_2\rangle\end{aligned}$$

für alle $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, und folglich ist $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Bilinearform auf $V_\mathbb{R}$. Symmetrie folgt aus $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\overline{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$, denn so folgt für $u, v \in V$, dass

$$\mathrm{Re}\langle v, u\rangle = \mathrm{Re}\overline{\langle u, v\rangle} = \mathrm{Re}\langle u, v\rangle.$$

Da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nach Voraussetzung ein komplexes inneres Produkt auf $V_\mathbb{C}$ ist, gilt $\langle v, v\rangle \in (0, \infty)$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$ und folglich ist

$$\mathrm{Re}\langle v, v\rangle = \langle v, v\rangle > 0$$

für alle $v \in V$. Insbesondere ist $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit und somit ein reelles inneres Produkt auf $V_\mathbb{R}$.

Für die letzte Behauptung, sei $v \in V$, dann ist nach Voraussetzung

$$\mathrm{Re}\langle v, \mathrm{i}v\rangle = \mathrm{Re}\big(\mathrm{i}\underbrace{\langle v, v\rangle}_{\in\mathbb{R}}\big) = 0,$$

wie gewünscht.

Siehe nächstes Blatt!

b) Wir bemerken zuerst, dass aus der Voraussetzung für beliebige $u, v \in V$ gilt

$$0 = \langle u + \mathrm{i}v, \mathrm{i}(u + \mathrm{i}v)\rangle = \underbrace{\langle u, \mathrm{i}u\rangle}_{=0} - \langle u, v\rangle + \langle \mathrm{i}v, \mathrm{i}u\rangle - \langle \mathrm{i}v, v\rangle,$$

und wegen $\langle \mathrm{i}v, v\rangle = -\langle \mathrm{i}v, \mathrm{i}^2 v\rangle = 0$ gilt aufgrund der Symmetrie von $\langle\cdot,\cdot\rangle$, dass

$$\langle \mathrm{i}u, \mathrm{i}v\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Da $u, v \in V$ beliebig waren, ist die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $v \mapsto \mathrm{i}v$ orthogonal und es gilt

$$\langle u, \mathrm{i}v\rangle = -\langle \mathrm{i}u, v\rangle \quad (u, v \in V).$$

Seien $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in V$, dann gelten

$$\begin{aligned}
\langle u_1 + u_2, v\rangle_{\mathbb{C}} =& \langle u_1 + u_2, v\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}u_1 + \mathrm{i}u_2, v\rangle\\
=& \langle u_1, v\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}u_2, v\rangle\\
=& \langle u_1, v\rangle_{\mathbb{C}} + \langle u_2, v\rangle_{\mathbb{C}},\\
\langle u, v_1 + v_2\rangle_{\mathbb{C}} =& \langle u, v_1 + v_2\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}u, v_1 + v_2\rangle\\
=& \langle u, v_1\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}u, v_2\rangle\\
=& \langle u, v_1\rangle_{\mathbb{C}} + \langle u, v_2\rangle_{\mathbb{C}},\\
\langle \lambda u, v\rangle_{\mathbb{C}} =& \langle \alpha u + \mathrm{i}\beta u, v\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \alpha u, v\rangle_{\mathbb{C}} + \langle \mathrm{i}\beta u, v\rangle_{\mathbb{C}}\\
=& \langle \alpha u, v\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}\alpha u, v\rangle + \langle \mathrm{i}\beta u, v\rangle + \mathrm{i}\langle -\beta u, v\rangle\\
=& \alpha\langle u, v\rangle + \alpha\mathrm{i}\langle \mathrm{i}u, v\rangle + \beta\langle \mathrm{i}u, v\rangle - \beta\mathrm{i}\langle u, v\rangle\\
=& \alpha\big(\langle u, v\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}u, v\rangle\big) - \mathrm{i}\beta\big(\langle u, v\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}u, v\rangle\big)\\
=& \overline{\lambda}\langle u, v\rangle_{\mathbb{C}},\\
\langle u, \lambda v\rangle_{\mathbb{C}} =& \langle u, \alpha v + \mathrm{i}\beta v\rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, \alpha v\rangle_{\mathbb{C}} + \langle u, \mathrm{i}\beta v\rangle_{\mathbb{C}}\\
=& \langle u, \alpha v\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}u, \alpha v\rangle + \langle u, \mathrm{i}\beta v\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}u, \mathrm{i}\beta v\rangle\\
=& \langle u, \alpha v\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}u, \alpha v\rangle - \langle \mathrm{i}u, \beta v\rangle + \mathrm{i}\langle u, \beta v\rangle\\
=& \alpha\langle u, v\rangle + \mathrm{i}\alpha\langle \mathrm{i}u, v\rangle - \beta\langle \mathrm{i}u, v\rangle + \mathrm{i}\beta\langle u, v\rangle\\
=& \alpha\big(\langle u, v\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}u, v\rangle\big) + \mathrm{i}\beta\big(\langle u, v\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}u, v\rangle\big)\\
=& \lambda\langle u, v\rangle_{\mathbb{C}}.
\end{aligned}$$

Somit ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ eine Sesquilinearform auf $V_{\mathbb{C}}$.

Sei $v \in V \setminus \{0\}$, dann ist

$$\langle v, v\rangle_{\mathbb{C}} = \langle v, v\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}v, v\rangle = \langle v, v\rangle > 0,$$

da wie oben gezeigt $\langle \mathrm{i}v, v\rangle = -\langle v, \mathrm{i}v\rangle = 0$.

Schliesslich ist

$$\langle u, v\rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, v\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}u, v\rangle = \langle v, u\rangle - \mathrm{i}\langle u, \mathrm{i}v\rangle = \langle v, u\rangle - \mathrm{i}\langle \mathrm{i}v, u\rangle = \overline{\langle v, u\rangle_{\mathbb{C}}}$$

und somit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein komplexes inneres Produkt auf $V_{\mathbb{C}}$.

Bitte wenden!

4. **a)** Falls $v = 0$ ist, dann ist nichts zu zeigen. Sei also $v \neq 0$, dann existieren $s_1, \dots, s_n \in S$ paarweise verschieden, sowie Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, sodass $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i$ gilt. Sei $S' = \{s_1, \dots, s_n\} \subset S$. Falls $S = S'$, dann ist S endlich und somit gilt die Aussage sicherlich. Andernfalls sei $s \in S \setminus S'$ gilt

$$\langle v, s\rangle = \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i, s\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i}\langle s_i, s\rangle = 0,$$

und da S' endlich ist, folgt die Behauptung. Insbesondere haben wir gezeigt, dass für jede Wahl $S' \subset S$, sodass $v \in \operatorname{span}(S')$ ist, die Aussage

$$\forall s \in S \setminus S' : \langle v, s\rangle = 0$$

gilt.

b) Da u und v sich per definitionem als endliche Linearkombinationen von Elementen in S schreiben lassen, existiert $S' = \{s_1, \dots, s_n\} \subset S$ mit paarweise verschiedenen s_i, sodass $u, v \in \operatorname{span}(S')$. Seien

$$u = \sum_{i=1}^n \mu_i s_i \text{ und } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i,$$

dann folgt $\langle u, s_i\rangle = \overline{\mu_i}$ und $\langle s_i, v\rangle = \lambda_i$ wegen der Sesquiliniearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dass

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle =& \langle \sum_{i=1}^n \mu_i s_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j s_j\rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \overline{\mu_j} \underbrace{\langle s_i, s_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{\mu_i} \\ =& \sum_{i=1}^n \langle u, s_i\rangle\langle s_i, v\rangle = \sum_{i=1}^n \langle u, s_i\rangle\overline{\langle v, s_i\rangle} = \sum_{s\in S}\langle u, s\rangle\overline{\langle v, s\rangle},\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Konsequenz aus Teilaufgabe a) verwendet haben.

5. Angenommen T wäre ein Endomorphismus wie in der Aufgabenstellung. Wähle eine geordnete ONB $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V (bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Wir wissen aus der Vorlesung, dass

$$\forall v \in V : T(v) = \sum_{i=1}^n \langle v_i, Tv\rangle v_i = \sum_{i=1}^n \overline{\gamma(v, v_i)} v_i.$$

Folglich ist die Darstellungsmatrix von T gegeben durch

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left(\overline{\gamma(v_j, v_i)}\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Dies verwenden wir, um T zu konstruieren. Sei $\mathcal{B}$ wie oben und sei γ eine beliebige Sesquilinearform auf V. Da die Abbildung $\mathrm{End}(V) \to M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $T \mapsto [T]_{\mathcal{B}}$, wie in der Linearen Algebra I gezeigt wurde, ein Isomorphismus ist, existiert genau ein Endomorphismus $T_\gamma \in \mathrm{End}(V)$ mit $[T_\gamma]_{\mathcal{B}} = \left(\overline{\gamma(v_j, v_i)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. Wir behaupten, dass T_γ die gewünschte Gleichung erfüllt.

Wir bemerken zuerst, dass die Wahl von $\mathcal{B}$ als ONB von V impliziert, dass für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle v, w\rangle = [v]_{\mathcal{B}}^*[w]_{\mathcal{B}}. \tag{1}$$

Tatsächlich erhalten Wir

$$[v_j]_{\mathcal{B}}^*[v_i]_{\mathcal{B}} = e_j^T e_i = \delta_{i,j} = \langle v_j, v_i\rangle$$

für $1 \leq i, j \leq n$ und da nach Aufgabe 1. die Abbildung $(v, w) \mapsto [v]_{\mathcal{B}}^*[w]_{\mathcal{B}}$ eine Sesquilinearform auf V definiert, folgt (1).

Sei $1 \leq i \leq n$, dann gilt nach vorangehender Beschreibung von $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$\langle T_\gamma v_j, v_i\rangle = [T_\gamma v_j]_{\mathcal{B}}^*[v_i]_{\mathcal{B}} = \gamma(v_j, v_i).$$

Da T_γ linear ist, ist die Abbildung $(v, w) \mapsto \langle T_\gamma v, w\rangle$ sesquilinear und somit folgt, dass

$$\langle T_\gamma v, w\rangle = \gamma(v, w)$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

6. Wir haben in Aufgabe 1. gezeigt, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Sesquilinearform definiert mit Darstellungsmatrix A bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}_2$. Wir müssen also nur überprüfen, ob $\langle\cdot,\cdot\rangle$ schiefsymmetrisch und positiv ist.

Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Sesquilinearform genau dann schiefsymmetrisch ist, wenn A hermitesch ist, d.h. $A^* = \overline{A}^T = A$. Es ist

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} = A^T$$

und da $\cdot^T$ eine Involution auf $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ist, folgt also $A^* = A$.

Für die Positivität berechnen wir

$$(\overline{x}, \overline{y})A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\overline{x} - \mathrm{i}\overline{y}, \mathrm{i}\overline{x} + 2\overline{y})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = |x|^2 - \mathrm{i}x\overline{y} + \mathrm{i}\overline{x}y + 2|y|^2.$$

Seien $x = a + \mathrm{i}b$ und $y = c + \mathrm{i}d$, dann ist

$$x\overline{y} = (a + \mathrm{i}b)(c - \mathrm{i}d) = ac + bd + \mathrm{i}(bc - ad)$$

Bitte wenden!

$$\overline{x}y = (a - \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = ac + bd + \mathrm{i}(ad - bc)$$

und folglich

$$\overline{x}y - x\overline{y} = 2\mathrm{i}(ad - bc).$$

Angenommen die Form wäre nicht positiv, dann finden wir $x, y \in \mathbb{C}$ nicht beide 0, sodass

$$\begin{aligned} 0 \geq &|x|^2 + 2|y|^2 - 2(ad - bc) \\ = &a^2 + b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 2(ad - bc) \\ = &(a - d)^2 + d^2 + (b + c)^2 + c^2. \end{aligned}$$

Aber das ist absurd, denn entweder ist $y \neq 0$ und somit

$$0 < c^2 + d^2 \leq (a - d)^2 + d^2 + (b + c)^2 + c^2,$$

oder $y = 0$ und dann $x \neq 0$ und somit

$$0 < a^2 + b^2 = (a - d)^2 + d^2 + (b + c)^2 + c^2.$$