Lösung 13:
Unitäre Vektorräume und normale Abbildungen

1. a) Im Folgenden sei $\gamma : V \times V \to \mathbb{C}$ die Abbildung

$$\gamma(v,w) = \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - \mathrm{i}\|v+\mathrm{i}w\|^2 + \mathrm{i}\|v-\mathrm{i}w\|^2.$$

"$\Leftarrow$": Wir zeigen zuerst, dass $\|\cdot\|$ durch ein komplexes inneres Produkt induziert ist, falls γ ein komplexes inneres Produkt ist. Man berechnet unter Verwendung der Tatsache, dass $\|\cdot\|$ eine Norm ist

$$\begin{aligned}\gamma(v,v) =& \|2v\|^2 - \mathrm{i}\|(1+\mathrm{i})v\|^2 + \mathrm{i}\|(1-\mathrm{i})v|^2 \\ =& 4\|v\|^2 - \mathrm{i}|1+\mathrm{i}|^2\|v\|^2 + \mathrm{i}|1-\mathrm{i}|^2\|v\|^2 = 4\|v\|^2,\end{aligned}$$

und da für alle $\alpha > 0$ auch $\alpha\gamma$ ein komplexes inneres Produkt ist, ist die Abbildung $(v,w) \mapsto \langle v,w\rangle = \frac{1}{4}\gamma(v,w)$ $(v,w \in V)$ ein komplexes inneres Produkt, sodass $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ gilt für alle $v \in V$. Also ist $\|\cdot\|$ durch ein inneres Produkt induziert.

"$\Rightarrow$": Für die Umkehrung zeigen wir die *Polarisationsformel*: Angenommen $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist ein komplexes inneres Produkt auf V und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm, dann gilt für alle $v,w \in V$

$$\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - \mathrm{i}\|v+\mathrm{i}w\|^2 + \mathrm{i}\|v-\mathrm{i}w\|^2).$$

Wir berechnen die einzelnen Terme in der Summe auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 =& \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle,\\ \|v-w\|^2 =& \langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle,\\ \mathrm{i}\|v+\mathrm{i}w\|^2 =& \mathrm{i}\langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \mathrm{i}\langle w,w\rangle,\\ \mathrm{i}\|v-\mathrm{i}w\|^2 =& \mathrm{i}\langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle + \mathrm{i}\langle w,w\rangle.\end{aligned}$$

Nach Summation mit entsprechenden Vorzeichen ergibt sich also

$$\gamma(v,w) = 4\langle v,w\rangle,$$

und somit folgt die gewünschte Gleichung.

b) Wir erinnern zuerst daran, dass per definitionem T genau dann unitär ist, wenn

$$\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$$

gilt für alle $v, w \in V$.

"$\Rightarrow$": Falls T unitär ist, folgt nach Definition insbesondere $\langle v, v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle$ für alle $v \in V$.

"$\Leftarrow$": Es gelte im Folgenden also $\langle Tv, Tv \rangle = \langle v, v \rangle$ für alle $v \in V$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle = \langle v + w, v + w \rangle& \\ =& \langle T(v+w), T(v+w) \rangle = \langle Tv + Tw, Tv + Tw \rangle \\ =& \langle Tv, Tv \rangle + \langle Tv, Tw \rangle + \langle Tw, Tv \rangle + \langle Tw, Tw \rangle \qquad (1) \\ \langle v, v \rangle + \mathrm{i}\langle v, w \rangle - \mathrm{i}\langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle = \langle v + \mathrm{i}w, v + \mathrm{i}w \rangle& \\ =& \langle T(v+\mathrm{i}w), T(v+\mathrm{i}w) \rangle = \langle Tv + \mathrm{i}Tw, Tv + \mathrm{i}Tw \rangle \\ =& \langle Tv, Tv \rangle + \mathrm{i}\langle Tv, Tw \rangle - \mathrm{i}\langle Tw, Tv \rangle + \langle Tw, Tw \rangle. \qquad (2) \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gelten also

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle =& \langle Tv, Tw \rangle + \langle Tw, Tv \rangle \\ (2) \Rightarrow \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle =& \langle Tv, Tw \rangle - \langle Tw, Tv \rangle. \end{aligned}$$

Da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitesch ist, folgen

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\langle Tv, Tw \rangle) =& \frac{1}{2}(\langle Tv, Tw \rangle + \overline{\langle Tv, Tw \rangle}) = \frac{1}{2}(\langle Tv, Tw \rangle + \langle Tw, Tv \rangle) \\ =& \frac{1}{2}(\langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle) = \frac{1}{2}(\langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle}) = \mathrm{Re}(\langle v, w \rangle) \\ \mathrm{Im}(\langle Tv, Tw \rangle) =& \frac{1}{2\mathrm{i}}(\langle Tv, Tw \rangle - \overline{\langle Tv, Tw \rangle}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\langle Tv, Tw \rangle - \langle Tw, Tv \rangle) \\ =& \frac{1}{2\mathrm{i}}(\langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\langle v, w \rangle - \overline{\langle v, w \rangle}) = \mathrm{Im}(\langle v, w \rangle) \end{aligned}$$

und folglich $\langle v, w \rangle = \langle Tv, Tw \rangle$. Da $v, w \in V$ beliebig waren, folgt die Behauptung.

2. a) Wir erinnern uns, dass die Determinante einer Matrix A nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz gegeben ist durch die Formel

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det(\tilde{A}_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det(\tilde{A}_{ij}),$$

Siehe nächstes Blatt!

wobei die Matrix $\tilde{A}_{ij}$ die $n-1\times n-1$-Matrix ist, die man nach Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von A erhält. Man beachte, dass $\tilde{(A^T)}_{ij} = (\tilde{A}_{ji})^T$.

Wir beweisen die Behauptung mittels Induktion nach der Dimension der Matrix A. Sei $A \in M_{1\times 1}(\mathbb{C})$, dann ist A ein Skalar und es gilt $A^T = A$ und somit $A^* = \overline{A}^T = \overline{A}$. Insbesondere also

$$\overline{\det(A)} = \overline{A} = A^* = \det(A^*).$$

Angenommen die Aussage stimmt für Matrizen der Dimension bis und mit n. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, dann ist

$$\begin{aligned}
\det(A^*) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A^*_{ij}\det(\tilde{(A^*)}_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A^*_{ij}\det(\tilde{(\overline{A}^T)}_{ij}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\overline{A_{ji}}\det((\tilde{\overline{A}}_{ji})^T) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\overline{A_{ji}}\det(\overline{\tilde{A}_{ji}}^T) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\overline{A_{ji}}\det(\tilde{A}_{ji}^*) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\overline{A_{ji}}\overline{\det(\tilde{A}_{ji})} \\
&= \overline{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ji}\det(\tilde{A}_{ji})} = \overline{\det(A)}.
\end{aligned}$$

Somit folgt $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$ wie gewünscht.

b) Wir wissen aus der Vorlesung, dass A diagonalisierbar ist, d.h. $A = Q^{-1}DQ$ für ein $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$, und dass die Diagonaleinträge der auftretenden Diagonalmatrix genau die Eigenwerte von A mit entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit sind. Wir haben in der Linearen Algebra I gezeigt, dass die Spur tr invariant ist unter Vertauschung, d.h. für alle Matrizen $B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ gilt $\mathrm{tr}(BC) = \mathrm{tr}(CB)$. Es folgt also

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(Q^{-1}DQ) = \mathrm{tr}(DQQ^{-1}) = \mathrm{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

Für die zweite Gleichung bemerken wir, dass de facto eine ONB von V existiert, sodass $A = Q^*DQ$, wobei $Q \in \mathrm{U}(n)$ die Matrix mit den Elementen der ONB als Spalten sei. Hier ist $Q \in \mathrm{O}(n)$, falls A reell, symmetrisch ist, und in diesem Falle ist $Q^* = Q^T$.

Es folgt $A^* = Q^*D^*Q$, und D^* ist eine Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge gegeben sind durch $D^*_{ii} = \overline{D_{ii}}$. Es folgt

$$\mathrm{tr}(A^*A) = \mathrm{tr}(Q^*D^*QQ^*DQ) = \mathrm{tr}(Q^*D^*DQ) = \mathrm{tr}(D^*DQQ^*)$$

Bitte wenden!

$$=\mathrm{tr}(D^*D) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2.$$

c) Betrachte die Abbildung $\Phi : V \to V$ gegeben durch $\Phi = T^*T$. Falls $T = cS$ gilt für eine unitäre Abbildung $S : V \to V$, dann ist

$$\Phi = T^*T = (cS)^*(cS) = |c|^2 S^*S = |c|^2 I_V.$$

Als ersten Schritt in diese Richtung zeigen wir, dass jeder Vektor $v \in V$ ein Eigenvektor von Φ ist, d.h. wir zeigen $\Phi v = \lambda_v v$ für ein $\lambda_v \in \mathbb{C}$, wobei wir vorerst zulassen, dass der Skalar λ_v vom Vektor v abhängt. Falls $\Phi v = 0$ ist, dann ist nichts zu zeigen. Sei also $\Phi v \neq 0$. Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete ONB von V, die $\frac{v}{\|v\|}$ als Element enthält. Für alle $w \in \mathcal{B} \setminus \{\frac{v}{\|v\|}\}$ gilt

$$\langle v, w\rangle = \|v\|\langle \tfrac{v}{\|v\|}, w\rangle = 0 \Rightarrow \langle \Phi v, w\rangle = \langle Tv, Tw\rangle = 0$$

und folglich ist

$$\Phi v = \sum_{w\in\mathcal{B}} \langle w, \Phi v\rangle w = \langle \tfrac{v}{\|v\|}, \Phi v\rangle \tfrac{v}{\|v\|} = \frac{\|Tv\|^2}{\|v\|^2} v.$$

Insbesondere ist also jeder Vektor in V ein Eigenvektor von Φ.

Da jeder Vektor $v \in V$ ein Eigenvektor von Φ ist, besitzt V insbesondere eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von Φ, sprich Φ ist diagonalisierbar. Da wir aus der Diskussion zur Diagonalisierbarkeit wissen, dass eine Linearkombination von Eigenvektoren genau dann ein Eigenvektor ist, wenn die Summanden alles Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert sind, ist $[\Phi]_{\mathcal{B}} = \lambda I_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, wobei $n = \dim(V)$ ist. Insbesondere ist also $\Phi = \lambda I_V$.

Falls $\lambda = 0$ ist, dann ist $T = 0$, da wie im reellen Falle $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathrm{Ker}(T)$ gilt. Insbesondere ist dann die Behauptung richtig.

Sei also $\lambda \neq 0$. Wir behaupten, dass λ reell ist. Wähle einen normierten Vektor $v \in V$. Es gilt aufgrunde der positiven Definitheit des inneren Produktes, dass

$$\lambda = \langle v, \lambda v\rangle = \langle v, \Phi v\rangle = \langle Tv, Tv\rangle > 0.$$

Definiere $S = \lambda^{-\frac{1}{2}} T$, dann ist (weil $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ reell ist)

$$S^*S = \lambda^{-1} T^*T = \lambda^{-1}\lambda I_V = I_V$$

und somit S unitär.

Siehe nächstes Blatt!

3. a) "(i)⇒(ii)": Sei λ ein Eigenwert von A, dann existiert ein $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, sodass $Av = \lambda v$. Da A hermitesch ist, folgt

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle Av, v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$

und somit ist $\lambda = \overline{\lambda}$, da $\langle v, v\rangle \neq 0$. Dies zeigt bereits, dass λ reell ist, wann immer A hermitesch ist. Dasselbe Argument angewandt mit der positiven Definitheit von A liefert, dass λ positiv ist, denn es gilt

$$0 < \langle Av, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$$

und somit folgt $\lambda > 0$ aus $\langle v, v\rangle > 0$.

"(ii)⇒(iii)": Da A hermitesch ist, ist L_A selbstadjungiert bezüglich dem standard inneren Produkt und insbesondere diagonalisierbar, da normal. Das heisst, es existieren eine Diagonalmatrix $D \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, sowie eine ONB $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^n$, sodass $[L_A]_{\mathcal{B}} = D$ gilt. Da die Diagonaleinträge von D alles Eigenwerte von L_A sind, sind diese allesamt positiv. Sei $D' \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ die durch D eindeutig bestimmte symmetrische, positiv definite Quadratwurzel von D (vgl. Serie 9, Aufgabe 2.c). Sei $Q = [I_{\mathbb{C}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n}$. Da $\mathcal{B}$ eine ONB bezüglich dem standard inneren Produkt auf $\mathbb{C}^n$ ist, ist Q unitär. Es folgt mit $K = Q^*$

$$A = [L_A]_{\mathcal{E}_n} = K^*[L_A]_{\mathcal{B}}K = K^*D'D'K = (D'K)^*(D'K).$$

Setze also $B = D'K$. B ist invertierbar, da alle Eigenwerte von A positiv sind. Denn über $\mathbb{C}$ zerfällt das charakterisctische Polynom von A in Linearfaktoren, und somit ist A ähnlich zu einer Matrix in Jordan Normalform, deren Diagonaleinträge allesamt positiv sind. Dies impliziert, dass

$$\det(B^*)\det(B) = \det(B^*B) = \det(A) \neq 0$$

und insbesondere B invertierbar ist.

"(iii)⇒(iv)": Definiere eine Abbildung $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle_A = v^*Aw$. Da A hermitesch ist, ist diese Abbildung bilinear und schiefsymmetrisch. Da $A = B^*B$ ist, gilt

$$\langle v, v\rangle_A = v^*B^*Bv = (Bv)^*Bv$$

und da das standard innere Produkt auf $\mathbb{C}^n$ positiv definit und Bv aufgrund der Invertierbarkeit von B für alle $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ von 0 verschieden ist, folgt $\langle v, v\rangle_A > 0$ für alle $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Also ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein komplexes inneres Produkt auf $\mathbb{C}^n$.

Um R zu konstruieren, starten wir mit der Standardbasis $\mathcal{E}_n$ von $\mathbb{C}$. Der Gram-Schmidt Algorithmus liefert uns eine geordnete ONB $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{C}^n$, wobei

$$\forall 1 \leq i \leq n : \; v_i \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_i\}.$$

Bitte wenden!

Insbesondere ist $[I_{\mathbb{C}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n}$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix, mit der Eigenschaft

$$([I_{\mathbb{C}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n})^* A [I_{\mathbb{C}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n} = I_n.$$

Da für alle $M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ gilt

$$\overline{M^{-1}}\,\overline{M} = \overline{M^{-1}M} = \overline{I_n} = I_n,$$

ist $\overline{M}^{-1} = \overline{M^{-1}}$. Sei also $R = [I_{\mathbb{C}^n}]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{B}}$, dann folgt $A = R^*R$ wie gewünscht.

"(iv)⇒(v)": Wie bereits oben verwendet, ist die Matrix A diagonalisierbar bezüglich einer ONB von $\mathbb{C}^n$, und da $A = R^*R$ gilt, folgt für jeden Eigenwert λ und Eigenvektor v von A, dass

$$\lambda v^* v = v^* A v = v^* R^* R v = (Rv)^*(Rv) > 0,$$

und somit $\lambda > 0$, da das standard innere Produkt auf $\mathbb{C}^n$ positiv definit ist. Sei also $A = Q^* D Q$ für eine Diagonalmatrix $D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit positiven Diagonaleinträgen, sowie eine unitäre Matrix $Q \in U(n)$. Sei D' wieder die Diagonalmatrix mit den positiven Quadratwurzeln der Diagonaleinträge von D auf der Diagonalen, sodass $D'D' = D$ gilt. Dann ist

$$A = Q^* D Q = (Q^* D' Q)(Q^* D' Q),$$

und da D' symmetrisch und reell, insbesondere also hermitesch ist, ist auch $C = Q^* D' Q$ hermitesch. Da R invertierbar ist, ist auch $A = R^*R$ invertierbar, und somit auch C nach dem Argument von oben.

"(v)⇒(i)": Sei $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, dann ist

$$v^* A v = v^* C^* C v = (Cv)^*(Cv) > 0$$

da $Cv \neq 0$ und somit ist A positiv definit.

b) Wir zeigen zuerst, dass aus der positiven Definitheit von A die Positivität der sogenannten Hauptminoren folgt. Im Folgenden sei für $1 \leq k \leq n$ die Matrix $A(k) \in M_{k\times k}(\mathbb{C})$ gegeben durch

$$A(k)_{ij} = A_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq k).$$

Da A hermitesch ist, gilt dasselbe für die Matrizen $A(k)$, $1 \leq k \leq n$. Betrachte die Abbildung $\mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$, $v \mapsto v^* A(k) v$. Diese Abbildung stimmt mit der Komposition von $\mathbb{C}^k \ni v \mapsto i(v) = \binom{v}{0} \in \mathbb{C}^n$ und $\mathbb{C}^n \ni w \mapsto w^* A w \in \mathbb{C}$ überein. Letztere ist positiv und erstere ist injektiv, folglich ist die Komposition positiv und somit auch die Matrix $A(k)$. Dies gilt für alle $1 \leq k \leq n$. Wie in Teilaufgabe (a) gezeigt, sind die $A(k)$ diagonalisierbar mit positiven Eigenwerten und folglich ist $\det(A(k)) > 0$ für alle $1 \leq k \leq n$. Dies zeigt die erste Richtung.

Siehe nächstes Blatt!

Für die andere Richtung adaptieren wir den Beweis aus der Analysis. Falls $n = 1$ gilt, dann ist nichts zu zeigen. Sei die Aussage also für Matrizen der Dimension höchstens $n-1 \times n-1$ wahr. Schreibe

$$A = \begin{pmatrix} B & v \\ v^* & c \end{pmatrix}$$

für eine hermitesche Matrix $B \in M_{n-1\times n-1}(\mathbb{C})$, sowie ein $v \in \mathbb{C}^{n-1}$ und $c \in \mathbb{C}$. Nach Voraussetzung ist $\det(B) > 0$ und B folglich invertierbar. Definiere die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} I_{n-1} & -B^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet unter Verwendung von $(B^{-1})^* = (B^*)^{-1} = B^{-1}$, dass

$$\begin{aligned} R^*AR &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -v^*B^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & v \\ v^* & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & -B^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B & v \\ -v^*B^{-1}B + v^* & -v^*B^{-1}v + c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & -B^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \tilde{c} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gilt, wobei $\tilde{c} = c - v^*B^{-1}v$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Matrix B positiv definit, und wegen

$$0 < \det(A) = \det(R^*AR) = \det(B)\tilde{c}$$

folgt mit $\det(B)$, dass $\tilde{c} > 0$ ist. Insbesondere ist R^*AR positiv definit, und wegen der Invertierbarkeit (also insbesondere Injektivität) von R also auch A, da für alle $w \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$w^*Aw = (R^{-1}w)^*R^*AR(R^{-1}w) > 0.$$

Dies beweist die Umkehrung.

4. **a)** Wir zeigen zuerst, dass für alle Automorphismen $S : V \to V$ die Abbildung $(v, w) \mapsto \langle Sv, Sw\rangle$ ein inneres Produkt auf V definiert.

Da S nach Voraussetzung linear ist, ist die oben definierte Paarung sicher sesquilinear: Für alle $v, v', w, w' \in V$ und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned} \langle S(v + \lambda v'), S(w + \mu w')\rangle &= \langle Sv + \lambda Sv', Sw + \mu Sw'\rangle \\ &= \langle Sv, Sw\rangle + \mu\langle Sv, Sw'\rangle + \overline{\lambda}\langle Sv', w\rangle + \overline{\lambda}\mu\langle Sv', Sw'\rangle. \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt für $v, w \in V$:

$$\langle Sw, Sv\rangle = \overline{\langle Sv, Sw\rangle},$$

und die Paarung ist hermitesch. Schliesslich ist $Sv \neq 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$, da S ein Automorphismus und somit injektiv ist. Insbesondere ist also

$$\langle Sv, Sv \rangle > 0,$$

wegen der Positivität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Man beachte, dass für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt $(T^k)^N = (T^N)^k = I_V^k = I_V$, und somit ist T^k für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ein Automorphismus von V. Somit ist

$$(v, w) \mapsto \sum_{k=0}^{N-1} \langle T^k v, T^k w \rangle$$

sesquilinear, hermitesch, als auch positiv. Die Sesquilinearität und die hermitesche Eigenschaft folgen aus der Tatsache, dass die Menge der hermiteschen Sesquilinearformen auf V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Positivität folgt aus der Tatsache, dass $\langle T^k v, T^k v \rangle > 0$ gilt für alle $0 \leq k < N$, wann immer $v \in V \setminus \{0\}$.

b) Seien $v, w \in V$, dann gilt

$$\begin{aligned}\langle Tv, Tw \rangle_T =& \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle T^k(Tv), T^k(Tw) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle T^{k+1} v, T^{k+1} w \rangle \\ =& \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \langle T^k v, T^k w \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle T^k v, T^k w \rangle = \langle v, w \rangle_T,\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung die endliche Ordnung von T verwendet haben:

$$\langle T^N v, T^N w \rangle = \langle I_V v, I_V w \rangle = \langle T^0 v, T^0 w \rangle.$$

Insbesondere ist T also bezüglich dem komplexen inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ unitär, also normal, und es existiert eine ONB von V bestehend aus Eigenvektoren von T. Insbesondere ist T diagonalisierbar.

Bemerkung: Man beachte, dass die T diagonalisierende ONB von V eine ONB bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ ist, und diese nicht eine ONB bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sein muss.

5. a) Setze $T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$ und $T_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(T - T^*)$. Es gelten

$$\begin{aligned}T_1^* =& \tfrac{1}{2}(T + T^*)^* = \tfrac{1}{2}(T^* + T) = T_1 \\ T_2^* =& -\tfrac{1}{2\mathrm{i}}(T - T^*)^* = -\tfrac{1}{2\mathrm{i}}(T^* - T) = T_2\end{aligned}$$

und man überprüft

$$T_1 + \mathrm{i}T_2 = \tfrac{1}{2}(T + T^*) + \tfrac{1}{2}(T - T^*) = T.$$

Siehe nächstes Blatt!

Es bleibt zu zeigen, dass T_1 und T_2 durch T eindeutig bestimmt sind. Seien also T_1, T_2 und S_1, S_2 selbstadjungierte Endomorphismen von V, sodass

$$T = T_1 + \mathrm{i}T_2 = S_1 + \mathrm{i}S_2$$

gilt. Dann ist

$$T_1 - S_1 = \mathrm{i}(S_2 - T_2),$$

und es folgt

$$T_1 - S_1 = (T_1 - S_2)^* = (\mathrm{i}(S_2 - T_2))^* = -\mathrm{i}(S_2 - T_2) = -(T_1 - S_1).$$

Insbesondere ist $T_1 = S_1$ und folglich auch $T_2 = S_2$. Dies beweist die Eindeutigkeit.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} T^*T =& (T_1 - \mathrm{i}T_2)(T_1 + \mathrm{i}T_2) = T_1^2 - \mathrm{i}T_2T_1 + \mathrm{i}T_1T_2 + T_2^2 \\ TT^* =& (T_1 + \mathrm{i}T_2)(T_1 - \mathrm{i}T_2) = T_1^2 + \mathrm{i}T_2T_1 - \mathrm{i}T_1T_2 + T_2^2. \end{aligned}$$

Es folgt

$$T^*T = TT^* \Leftrightarrow -\mathrm{i}T_2T_1 + \mathrm{i}T_1T_2 = \mathrm{i}T_2T_1 - \mathrm{i}T_1T_2 \Leftrightarrow T_1T_2 = T_2T_1,$$

was zu beweisen war.

c) Wir berechnen wieder

$$\begin{aligned} (T+S)^*(T+S) =& T^*T + S^*T + T^*S + S^*S \\ =& TT^* + S^*T + T^*S + SS^* \\ (T+S)(T+S)^* =& TT^* + ST^* + TS^* + SS^* \end{aligned}$$

und somit ist $T + S$ genau dann normal, wenn $S^*T + T^*S = ST^* + TS^*$ gilt.

Als Gegenbeispiel betrachten wir Linksmultiplikation mit $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Wir setzen $T = L_A$ und $S = L_B$. Es wurde in der Vorlesung gezeigt, dass $L_A^* = L_{A^*}$ und ebenso $L_B^* = L_{B^*}$ gelten. Es ist also

$$\begin{aligned} L_B^*L_A + L_A^*L_B =& L_{B^*A} + L_{A^*B} = L_{B^*A + A^*B} \\ L_BL_A^* + L_AL_B^* =& L_{BA^*} + L_{AB^*} = L_{BA^* + AB^*} \end{aligned}$$

und somit ist $L_A + L_B$ genau dann normal, wenn $B^*A + A^*B = BA^* + AB^*$ gilt. Wir berechnen

$$B^*A + A^*B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
BA^* + AB^* &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Also ist $L_A + L_B$ nicht normal.

d) Angenommen $T^*S = ST^*$, dann ist $S^*T = (T^*S)^* = (ST^*)^* = TS^*$ und folglich

$$S^*T + T^*S = ST^* + TS^*,$$

was genau dann gilt, wenn $T + S$ normal ist.