Serie 13:
Unitäre Vektorräume und normale Abbildungen

1. **a)** Sei V ein komplexer Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ genau dann von einem komplexen inneren Produkt induziert ist, wenn die Abbildung

$$(v,w) \mapsto \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - \mathrm{i}\|v+\mathrm{i}w\|^2 + \mathrm{i}\|v-\mathrm{i}w\|^2$$

ein komplexes inneres Produkt ist.

b) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie

$$T \text{ ist unitär} \Leftrightarrow \forall v \in V : \langle Tv, Tv\rangle = \langle v, v\rangle.$$

2. **a)** Zeigen Sie, dass $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$ gilt für alle $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

b) Nehmen Sie an, dass $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch ist, oder dass $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ normal ist. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix A, gezählt mit algebraischer Vielfachheit. Zeigen Sie

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{und} \quad \mathrm{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2.$$

$^{\heartsuit}$**c)** Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Angenommen es gilt

$$\forall v, w \in V : \langle v, w\rangle = 0 \Rightarrow \langle Tv, Tw\rangle = 0.$$

Zeigen Sie, dass ein unitärer Endomorphismus $S : V \to V$ existiert, sodass $T = cS$ für ein $c \in \mathbb{C}$.

3. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermitesch.

Bitte wenden!

a) Zeigen Sie, dass die folgenden äquivalent sind:

(i) A ist positiv definit.

(ii) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(iii) Es existiert $B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ mit $A = B^*B$.

(iv) Es existiert eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ mit $A = R^*R$. (Cholesky-Zerlegung)

(v) Es existiert eine hermitesche Matrix $C \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ mit $A = C^*C = C^2$.

b) Zeigen Sie das Hauptminorenkriterium: A ist genau dann positiv definit wenn die Determinante der Matrix $(A_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ für alle $1 \leq k \leq n$ positiv ist.

♡**4.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler, unitärer Vektorraum. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus endlicher Ordnung, d.h. es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $T^N = I_V$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass

$$\langle v, w \rangle_T = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle T^k v, T^k w \rangle \quad (v, w \in V)$$

ein komplexes inneres Produkt auf V definiert.

b) Zeigen Sie, dass T diagonalisierbar ist.

5. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum.

a) Sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass eindeutige, selbstadjungierte Endomorphismen $T_1, T_2 \in \mathrm{End}(V)$ existieren, sodass $T = T_1 + \mathrm{i}T_2$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $T \in \mathrm{End}(V)$ genau dann normal ist, wenn T_1 und T_2 wie in Teilaufgabe (a) miteinander kommutieren.

c) Seien $T, S \in \mathrm{End}(V)$ normal. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $T + S$ nicht normal ist.

d) Seien $T, S \in \mathrm{End}(V)$ normal und nehmen Sie an, dass T^* und S kommutieren. Zeigen Sie, dass $T + S$ normal ist.

6. Online-Abgabe

Siehe nächstes Blatt!

1. Jede selbstadjungierte Abbildung ist normal.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann haben T und T^* dieselben Eigenwerte.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Jede selbstadjungierte Abbildung auf einem endlichdimensionalen Vektorraum ist diagonalisierbar.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. Jede unitäre Abbildung ist normal.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

5. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ ein normaler Endomorphismus auf einem unitären vektorraum. Dann ist T^* normal.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Bitte wenden!

6. Jede orthogonale Abbildung ist diagonalisierbar.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

7. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum, und sei $T \in \mathrm{End}(V)$, sodass $\sigma(T) = \{1\}$, dann ist T orthogonal, bzw. unitär.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

8. Welche der folgenden Matrizen sind über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

(a) $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2\mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 29. Mai, in der Übungsstunde oder davor im Fach Ihrer Assistentin/Ihres Assistenten im HG J 68.