Lösung 14:
Tensorprodukte

1. **a)** Wir zeigen zuerst, dass das Paar $(V/U, p)$ die universelle Eigenschaft besitzt. Da wir die allgemeinere Aussage in Teil b) brauchen werden, beginnen wir damit zu zeigen, dass das Paar $(V/U, p)$ die Eigenschaft aus Teil b) erfüllt, d.h. dass für alle $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $U \subset \mathrm{Ker}\varphi$ genau ein $\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}(V/U, W)$ existiert, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & W \\ V/U \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Wir definieren $\overline{\varphi}$ punktweise, indem wir

$$\overline{\varphi}(v + U) = \varphi(v) \quad (v + U \in V/U)$$

setzen. Wir müssen zeigen, dass das von der Wahl des Repräsentanten v der Nebenklasse $v + U$ unabhängig und $\overline{\varphi}$ somit tatsächlich wohldefiniert ist. Seien $v, v' \in V$, sodass $v + U = v' + U$. Per definitionem existiert also ein $u \in U$, sodass $v' = v + u$ und es folgt unter Verwendung der Linearität von φ, dass

$$\varphi(v') = \varphi(v + u) = \varphi(v) + \varphi(u) = \varphi(v),$$

da $U \subset \mathrm{Ker}\varphi$ ist. Somit ist $\overline{\varphi}$ wohldefiniert. Die Abbildung $\overline{\varphi}$ ist linear, denn für alle $v, \tilde{v} \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt nach Definition der Vektorraumstruktur auf V/U, dass

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}\big((v + U) + \lambda(\tilde{v} + U)\big) =& \overline{\varphi}\big((v + \lambda\tilde{v}) + U\big) \\ =& \varphi(v + \lambda\tilde{v}) = \varphi(v) + \lambda\varphi(\tilde{v}) \\ =& \overline{\varphi}(v + U) + \lambda\overline{\varphi}(\tilde{v} + U). \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Wir müssen noch die Eindeutigkeit zeigen. Sei also $\overline{\psi} \in \mathrm{Hom}(V/U, W)$, sodass

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & W \\ V/U \arrow[ur, "\overline{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h. $\overline{\psi} \circ p = \varphi$. Dann gilt für alle $v + U \in V/U$, dass

$$\overline{\psi}(v + U) = \overline{\psi}(p(v)) = (\overline{\psi} \circ p)(v) = \varphi(v) = \overline{\varphi}(v + U)$$

und somit $\overline{\psi} = \overline{\varphi}$. Dies zeigt die Eindeutigkeit.

Um die universelle Eigenschaft für $(V/U, p)$ zu beweisen, müssen wir noch zeigen, dass im Falle $U = \mathrm{Ker}\varphi$ die Abbildung $\overline{\varphi}$ injektiv ist. Sei also $v+U \in \mathrm{Ker}\overline{\varphi}$, dann ist $0 = \overline{\varphi}(v + U) = \varphi(v)$ und folglich $v \in \mathrm{Ker}\varphi$. Wegen $\mathrm{Ker}\varphi = U$ folgt also $v \in U$ und somit $v + U = U$, bzw. $v + U = 0_{V/U}$. Insbesondere folgt $\mathrm{Ker}\overline{\varphi} = \{0_{V/U}\}$ und somit ist $\overline{\varphi}$ injektiv.

Sei nun gegeben irgendein anderer Vektorraum $\tilde{V}$ über $\mathbb{K}$ zusammen mit einem Homomorphismus $\pi : V \to \tilde{V}$, sodass das Paar $(\tilde{V}, \pi)$ die universelle Eigenschaft besitzt. Wir wissen aus der Linearen Algebra I, dass $\mathrm{Ker}p = U$ gilt. Also erhalten wir das folgende kommutierende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & V/U \\ \tilde{V} \arrow[ur, hook, "\exists!\overline{p}"'] & \end{tikzcd}$$

Wir behaupten, dass daraus folgt, dass $U = \mathrm{Ker}\pi$. Sei $v \in \mathrm{Ker}\pi$, dann ist

$$p(v) = \overline{p}(\pi(v)) = \overline{p}(0) = 0$$

und folglich ist $v \in \mathrm{Ker}p = U$. Insbesondere ist also $\mathrm{Ker}\pi \subset U$. Sei andererseits $v \in U$, dann ist

$$0 = p(v) = \overline{p}(\pi(v))$$

und weil $\overline{p}$ injektiv ist, folgt $\pi(v) = 0$. Insbesondere ist also $U \subset \mathrm{Ker}\pi$. Beides zusammen beweist $U = \mathrm{Ker}\pi$.

Aufgrund der universellen Eigenschaft von $(V/U, p)$ erhalten wir das folgende kommutierende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "p"] & \\ V/U \arrow[r, hook, "\overline{\pi}"] \arrow[rr, bend right, "\overline{p}\circ\overline{\pi}"'] & \tilde{V} \arrow[r, hook, "\overline{p}"] & V/U \end{tikzcd}$$

Siehe nächstes Blatt!

denn nach Konstruktion ist

$$p = \overline{p} \circ \pi = \overline{p} \circ (\overline{\pi} \circ p) = (\overline{p} \circ \overline{\pi}) \circ p.$$

Da die Komposition zweier injektiver Abbildungen injektiv ist, ist $\overline{p} \circ \overline{\pi} : V/U \to V/U$ ein injektiver Homomorphismus, sodass

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"'] & V/U \\ V/U \arrow[ur, "\overline{p}\circ\overline{\pi}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Abbildung $\overline{p} \circ \overline{\pi}$ ist durch dieses Diagramm aufgrund der universellen Eigenschaft für $(V/U, p)$ eindeutig bestimmt. Andererseits kommutiert auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"'] & V/U \\ V/U \arrow[ur, "I_{V/U}"'] & \end{tikzcd}$$

und wegen der Eindeutigkeit folgt also $\overline{p} \circ \overline{\pi} = I_{V/U}$.

Analog folgt aus

$$\pi = \overline{\pi} \circ p = \overline{\pi} \circ (\overline{p} \circ \pi) = (\overline{\pi} \circ \overline{p}) \circ \pi,$$

dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \tilde{V} \arrow[r, hook, "\overline{p}"] \arrow[rr, bend right, "\overline{\pi}\circ\overline{p}"'] & V/U \arrow[r, hook, "\overline{\pi}"] & \tilde{V} \end{tikzcd}$$

und somit ist analog $\overline{\pi} \circ \overline{p} = I_{\tilde{V}}$. Somit besitzt $\overline{p}$ sowohl eine Rechts- als auch eine Linksinverse und ist also ein Isomorphismus.

Bemerkung: Der Isomorphismus $\psi : \tilde{V} \to V/U$ ist durch die Forderung, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \tilde{V} \arrow[dd, "\psi"] \\ V \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "p"'] & \\ & V/U \end{tikzcd}$$

kommutiert, eindeutig bestimmt.

Bitte wenden!

b) Wir wissen bereits aus Teilaufgabe a), dass die Aussage für das Paar $(V/U, p)$ gilt. Sei also $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus, sodass $U \subset \mathrm{Ker}\varphi$ gilt. Sei $\overline{\varphi} : V/U \to W$ der nach unserer Lösung von Teilaufgabe a) eindeutige Homomorphismus, sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & W \\ V/U \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Sei $\psi : \tilde{V} \to V/U$ der eindeutige Isomorphismus mit $\psi \circ \pi = p$. Insbesondere kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "p"] & W \\ \tilde{V} \arrow[r, "\psi"] \arrow[urr, bend right=60, "\overline{\varphi}\circ\psi"'] & V/U \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Dies beweist die Existenz einer Abbildung $\Phi = \overline{\varphi} \circ \psi : \tilde{V} \to W$, mit der Eigenschaft $\varphi = \Phi \circ \pi$. Es bleibt zu zeigen, dass Φ eindeutig bestimmt ist. Sei $\Psi : \tilde{V} \to W$ eine weitere Abbildung mit der gewünschten Eigenschaft. Dann kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/U \arrow[r, "\psi^{-1}"] \arrow[urr, bend right=60, "\Psi\circ\psi^{-1}"'] & \tilde{V} \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

und wegen der Eindeutigkeit aus Teilaufgabe a) folgt $\Psi \circ \psi^{-1} = \overline{\varphi}$, und folglich gilt

$$\Psi = \overline{\varphi} \circ \psi = \Phi.$$

2. Um die Darstellungsmatrix zu bestimmen, benötigen wir eine Ordnung der Basiselemente. Wir definieren sie durch

$$(i, j) \mapsto 3(i-1) + j \quad (1 \leq i, j \leq 3),$$

und schreiben im Folgenden $F_{3(i-1)+j} = E_{i,j}$ sowie

$$\mathcal{B} = (F_1, \ldots, F_9).$$

Siehe nächstes Blatt!

Nach Definition ist

$$\overline{\beta}(E_{i,j}) = \overline{\beta} \circ \varkappa(e_i, e_j) = \beta(e_i, e_j) = e_i \times e_j = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \\ e_3 & \text{falls } i = 1, j = 2 \\ -e_2 & \text{falls } i = 1, j = 3 \\ -e_3 & \text{falls } i = 2, j = 1 \\ e_1 & \text{falls } i = 2, j = 3 \\ e_2 & \text{falls } i = 3, j = 1 \\ -e_1 & \text{falls } i = 3, j = 2 \end{cases}$$

und folglich ist

$$[\overline{\beta}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. **a)** Definiere $\varkappa' : W \times \mathbb{K} \to W$ durch $\varkappa'(w, \lambda) = \lambda w$. Aufgrund der Vektorraumaxiome ist $\varkappa'$ bilinear. Wir zeigen, dass $(W, \varkappa')$ die universelle Eigenschaft eines Tensorprodukts von W mit $\mathbb{K}$ erfüllt.

UE: Sei U ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $\beta : W \times \mathbb{K} \to U$ bilinear. Dann existiert eine eindeutige Abbildung $\overline{\beta} : W \to U$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} W \times \mathbb{K} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varkappa'"'] & U \\ W \arrow[ur, "\overline{\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

Sei also β gegeben. Wir definieren $\overline{\beta} : W \to U$ durch

$$\overline{\beta}(w) = \beta(w, 1) \quad (w \in W).$$

β ist insbesondere linear im ersten Argument und folglich ist $\overline{\beta}$ linear. Für $w \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt aufgrund der Bilinearität von β

$$\overline{\beta}(\varkappa'(w, \lambda)) = \overline{\beta}(\lambda w) = \beta(\lambda w, 1) = \lambda \beta(w, 1) = \beta(w, \lambda).$$

Dies zeigt, dass $\overline{\beta}$ existiert, sodass das oben skizzierte Diagramm kommutiert. Es bleibt zu zeigen, dass $\overline{\beta}$ eindeutig bestimmt ist. Sei $\overline{\gamma} : W \to U$ eine lineare Abblidung, sodass $\beta = \gamma \circ \varkappa'$ gilt. Es folgt

$$\gamma(w) = \gamma(\varkappa'(w, 1)) = \beta(w, 1) = \overline{\beta}(w) \quad (w \in W)$$

und folglich $\gamma = \overline{\beta}$. Das beweist die Eindeutigkeit.

Bitte wenden!

b) Im Folgenden ist $\varkappa' : V_1 \times W \to W \otimes V_1$ die bilineare Abbildung gegeben durch

$$(v, w) \mapsto w \otimes v \quad (v \in V, w \in W).$$

Wir zeigen, dass das Paar $(W \otimes V_1, \varkappa')$ die universelle Eigenschaft erfüllt. Sei U ein Vektorraum und sei $\beta : V_1 \times W \to U$ bilinear. Definiere $\beta' : W \times V_1 \to U$ durch $\beta'(w, v) = \beta(v, w)$. β' ist bilinear und folglich existiert genau eine Abbildung $\overline{\beta'} : W \otimes V_1 \to U$, sodass

$$\beta(v, w) = \beta'(w, v) = \overline{\beta'}(w \otimes v)$$

und somit ist $\overline{\beta'}$ eine durch β vollständig bestimmte Abbildung $W \otimes V_1 \to U$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times W \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varkappa'"'] & U \\
W \otimes V_1 \arrow[ur, "\overline{\beta'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Also ist $W \otimes V_1$ (zusammen mit der Abbildung $\varkappa'$) ein Tensorprodukt von V_1 und W und somit eindeutig isomorph zu $V_1 \otimes W$.

c) Seien $n = \dim V_1$ und $m = \dim W$. Nach Teilaufgabe b) können wir o.B.d.A. annehmen, dass $n \leq m$ gilt. Seien $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ Basen von V_1 und W, dann ist die Menge

$$\{v_i \otimes w_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

eine Basis von $V_1 \otimes W$.

Gegeben ein beliebiges Element $u \in V_1 \otimes W$, so können wir Skalare $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ finden, sodass

$$u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} v_i \otimes w_j$$

gilt. Es folgt wegen der Bilinearität der Abbildung $(v, w) \mapsto v \otimes w$, dass

$$u = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} v_i \otimes w_j \right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} w_j \right),$$

und da für alle $1 \leq i \leq n$ das Element $v_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} w_j \right)$ ein reiner Tensor ist, folgt die Behauptung.

Siehe nächstes Blatt!

d) Wir definieren den Homomorphismus $\mathrm{Bil}(V_1 \times V_2, W) \to \mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, W)$ wie in der Vorlesung skizziert durch $\beta \mapsto \overline{\beta}$, wobei $\overline{\beta}$ durch die universelle Eigenschaft bestimmt ist, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & W \\ V_1 \otimes V_2 \arrow[ur, "\overline{\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

- Die Abbildung $\beta \mapsto \overline{\beta}$ ist linear. Seien $\beta_1, \beta_2 : V_1 \times V_2 \to W$ bilinear und sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Für $v_i \in V_i$ gilt

$$\begin{aligned} \overline{\beta_1}(v_1 \otimes v_2) + \lambda \overline{\beta_2}(v_1 \otimes v_2) =& \beta_1(v_1, v_2) + \lambda \beta_2(v_1, v_2) \\ =& (\beta_1 + \lambda \beta_2)(v_1, v_2) \\ =& \overline{\beta_1 + \lambda \beta_2}(v_1 \otimes v_2) \end{aligned}$$

  und weil die lineare Abbildung $\overline{\beta_1 + \lambda \beta_2}$ durch ihre Werte auf den reinen Tensoren eindeutig bestimmt ist, folgt also

$$\overline{\beta_1} + \lambda \overline{\beta_2} = \overline{\beta_1 + \lambda \beta_2}.$$

  Dies zeigt die Linearität.
- Die Abbildung $\beta \mapsto \overline{\beta}$ ist surjektiv. Sei $T \in \mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, W)$ linear. Definiere $\beta_T : V_1 \times V_2 \to W$ durch

$$\beta_T(v_1, v_2) = T(v_1 \otimes v_2) \quad (v_i \in V_i).$$

  Für $v_i, v_i' \in V_i$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten aufgrund der Bilinearität der Abbildung $(v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2$

$$\begin{aligned} \beta_T(v_1 + v_1', v_2) =& T((v_1 + v_1') \otimes v_2) = T(v_1 \otimes v_2 + v_1' \otimes v_2) \\ =& T(v_1 \otimes v_2) + T(v_1' \otimes v_2) = \beta_T(v_1, v_2) + \beta_T(v_1', v_2) \\ \beta_T(v_1, v_2 + v_2') =& T(v_1 \otimes (v_2 + v_2')) = T(v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes v_2') \\ =& T(v_1 \otimes v_2) + T(v_1 \otimes v_2') = \beta_T(v_1, v_2) + \beta_T(v_1, v_2') \\ \beta_T(\lambda v_1, v_2) =& T((\lambda v_1) \otimes v_2) = T(\lambda v_1 \otimes v_2) = \lambda T(v_1 \otimes v_2) = \lambda \beta_T(v_1, v_2) \\ \beta_T(v_1, \lambda v_2) =& T(v_1 \otimes (\lambda v_2) = T(\lambda v_1 \otimes v_2) = \lambda T(v_1 \otimes v_2) = \lambda \beta_T(v_1, v_2). \end{aligned}$$

  Also ist β_T bilinear. Da (per definitionem) gilt $\beta_T(v_1, v_2) = T(v_1 \otimes v_2)$ für alle $v_i \in V_i$, folgt aus der Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft, dass $T = \overline{\beta_T}$ und somit ist T im Bild der Abbildung enthalten. Da T beliebig war, ist $\beta \mapsto \overline{\beta}$ also surjektiv.

Bitte wenden!

- Die Abbildung $\beta \mapsto \overline{\beta}$ ist injektiv. Angenommen $\beta \in \mathrm{Bil}(V_1 \times V_2, W)$ und $\overline{\beta} = 0$, dann verschwindet $\overline{\beta}$ insbesondere auf den reinen Tensoren und folglich ist für alle $v_i \in V_i$

$$\beta(v_1, v_2) = \overline{\beta}(v_1 \otimes v_2) = 0$$

  und somit $\beta = 0$.

All dies zusammen zeigt, dass $\beta \mapsto \overline{\beta}$ ein Isomorphismus von $\mathrm{Bil}(V_1 \times V_2, W)$ nach $\mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, W)$ ist.

Für den zweiten Isomorphismus benötigen wir das Tensorprodukt nicht. Gegeben $\beta \in \mathrm{Bil}(V_1 \times V_2, W)$ und $v_1 \in V_1$, definiere $\beta_{v_1} : V_2 \to W$ durch

$$\beta_{v_1}(v_2) = \beta(v_1, v_2) \quad (v_2 \in V_2).$$

- Da β bilinear ist, gilt für jedes $v_1 \in V_1$ sowie $v_2, v_2' \in V_2$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \beta_{v_1}(v_2 + \lambda v_2') =& \beta(v_1, v_2 + \lambda v_2') = \beta(v_1, v_2) + \lambda\beta(v_1, v_2') \\ =& \beta_{v_1}(v_2) + \lambda\beta_{v_1}(v_2'). \end{aligned}$$

  Also ist $\beta_{v_1} \in \mathrm{Hom}(V_2, W)$ und da $v_1 \in V_1$ beliebig war, ist die Abbildung $\mathrm{Bil}(V_1 \times V_2, W) \to \mathrm{Hom}(V_1, \mathrm{Hom}(V_2, W))$, $\beta \mapsto (v_1 \mapsto \beta_{v_1})$ wohldefiniert. Im Folgenden schreiben wir $\hat{\beta}$ für die Abbildung $v_1 \mapsto \beta_{v_1}$, wenn $\beta \in \mathrm{Bil}(V_1 \times V_2, W)$ ist.
- Die Abbildung $\beta \mapsto \hat{\beta}$ ist linear. Seien $v_1, v_1' \in V_1$ und sei $\mu \in \mathbb{K}$. Für alle $v_2 \in V_2$ gilt

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(v_1 + \mu v_1')(v_2) =& \beta_{v_1 + \mu v_1'}(v_2) = \beta(v_1 + \mu v_1', v_2) \\ =& \beta(v_1, v_2) + \mu\beta(v_1', v_2) = \beta_{v_1}(v_2) + \mu\beta_{v_1'}(v_2) \\ =& \big(\hat{\beta}(v_1) + \mu\hat{\beta}(v_1')\big)(v_2) \end{aligned}$$

  und da $v_2 \in V_2$ beliebig war, folgt also

$$\hat{\beta}(v_1 + \mu v_1') = \hat{\beta}(v_1) + \mu\hat{\beta}(v_1'),$$

  und also ist $\hat{\beta}$ linear.
- Die Abbildung $\beta \mapsto \hat{\beta}$ ist surjektiv. Sei $T \in \mathrm{Hom}(V_1, \mathrm{Hom}(V_2, W))$, und definiere $\beta_T : V_1 \times V_2 \to W$ durch

$$\beta_T(v_1, v_2) = T(v_1)(v_2) \quad (v_i \in V_i).$$

  Seien $v_i, v_i' \in V_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gelten aufgrund der Linearität von T sowie der Linearität von $T(v)$ für alle $v \in V_1$

$$\beta_T(v_1 + \lambda v_1', v_2) = T(v_1 + \lambda v_1')(v_2)$$

Siehe nächstes Blatt!

$$
\begin{aligned}
&= T(v_1)(v_2) + \lambda T(v_1')(v_2) \\
&= \beta_T(v_1, v_2) + \lambda \beta_T(v_1', v_2) \\
\beta_T(v_1, v_2 + \lambda v_2') &= T(v_1)(v_2 + \lambda v_2') \\
&= T(v_1)(v_2) + \lambda T(v_1)(v_2') \\
&= \beta_T(v_1, v_2) + \lambda \beta_T(v_1, v_2').
\end{aligned}
$$

Also ist die Abbildung β_T in der ersten und in der zweiten Komponente linear, sprich bilinear. Es gilt für alle $v_i \in V_i$

$$\widehat{\beta_T}(v_1)(v_2) = \beta_T(v_1, v_2) = T(v_1)(v_2)$$

und somit ist $\widehat{\beta_T} = T$. Dies zeigt, dass T im Bild der Abbildung $\beta \mapsto \hat{\beta}$ liegt, und somit ist die Abbildung surjektiv.

- Die Abbildung $\beta \mapsto \hat{\beta}$ ist injektiv. Sei $\beta \in \mathrm{Bil}(V_1 \times V_2, W)$ im Kern, d.h. $\hat{\beta} = 0$. Dann ist per definitionem

$$\beta(v_1, v_2) = \hat{\beta}(v_1)(v_2) = 0 \quad (v_i \in V_i)$$

und folglich $\beta = 0$.

All dies zusammen zeigt, dass $\beta \mapsto \hat{\beta}$ ein Isomorphismus von $\mathrm{Bil}(V_1 \times V_2, W)$ nach $\mathrm{Hom}(V_1, \mathrm{Hom}(V_2, W))$ ist.

e) Definiere eine bilineare Abbildung $\tau : (V_1 \otimes V_2) \times W \to V_1 \otimes (V_2 \otimes W)$ durch

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \tilde{v}_i, w \right) \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes (\tilde{v}_i \otimes w).$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für alle $w \in W$ ist die Abbildung

$$V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes (V_2 \otimes W), (v, \tilde{v}) \mapsto v \otimes (\tilde{v} \otimes w)$$

wohldefiniert und bilinear, sodass genau eine lineare Abbildung

$$\varphi_w : V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes (V_2 \otimes W)$$

existiert, sodass für alle reinen Tensoren $v \otimes \tilde{v} \in V_1 \otimes V_2$ gilt:

$$\varphi_w(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes (v_2 \otimes w).$$

Sei nun $\beta : (V_1 \otimes V_2) \times W \to U$ eine bilineare Abbildung. Wir zeigen, dass eine eindeutig bestimmte Abbildung $\overline{\beta}$ existiert, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
(V_1 \otimes V_2) \times W \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
& U \\
V_1 \otimes (V_2 \otimes W) \arrow[ur, "\overline{\beta}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Bitte wenden!

was aufgrund der Eindeutigkeit des Tensorprodukts den gewünschten Isomorphismus (eindeutig) liefert. Sei $v \in V_1$, und definiere eine Abbildung $\beta_v : V_2 \times W \to U$ durch

$$\beta_v(\tilde{v}, w) = \beta(v \otimes \tilde{v}, w) \quad (\tilde{v} \in V_2, w \in W).$$

Die Abbildung β_v ist bilinear, da die Abbildung β bilinear und die Abbildung $\tilde{v} \mapsto v \otimes \tilde{v}$ linear ist. Insbesondere existiert also genau eine Abbildung $\overline{\beta_v}$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V_2 \times W \arrow[r, "\beta_v"] \arrow[d] & U \\ V_2 \otimes W \arrow[ur, "\overline{\beta_v}"'] & \end{tikzcd}$$

Nun ist wiederum die Abbildung $V_1 \times (V_2 \otimes W) \to U$, gegeben durch

$$(v, x) \mapsto \overline{\beta_v}(x) \quad (v \in V_1, x \in V_2 \otimes W)$$

bilinear, denn sie ist per definitionem linear in x und für alle $v_1, v_2 \in V_1, \lambda \in \mathbb{K}$ sowie für alle $x = \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \otimes w_i \in V_2 \otimes W$ gilt nach Konstruktion

$$\begin{aligned} \overline{\beta_{v_1+\lambda v_2}}(x) &= \sum_{i=1}^n \overline{\beta_{v_1+\lambda v_2}}(\tilde{v}_i \otimes w_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_{v_1+\lambda v_2}(\tilde{v}_i, w_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \beta((v_1 + \lambda v_2) \otimes \tilde{v}_i, w_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \beta(v_1 \otimes \tilde{v}_i + \lambda v_2 \otimes \tilde{v}_i, w_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \beta(v_1 \otimes \tilde{v}_i, w_i) + \lambda \beta(v_2 \otimes \tilde{v}_i, w_i) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \beta_{v_1}(\tilde{v}_i, w_i) + \lambda \beta_{v_2}(\tilde{v}_i, w_i) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \overline{\beta_{v_1}}(\tilde{v}_i \otimes w_i) + \lambda \overline{\beta_{v_2}}(\tilde{v}_i \otimes w_i) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ (\overline{\beta_{v_1}} + \lambda \overline{\beta_{v_2}})(\tilde{v}_i \otimes w_i) \right\} \\ &= (\overline{\beta_{v_1}} + \lambda \overline{\beta_{v_2}})(x). \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Insbesondere existiert also eine eindeutig bestimmte Abbildung $\overline{\beta} : V_1 \otimes (V_2 \otimes W) \to U$, sodass

$$\overline{\beta}(v \otimes x) = \overline{\beta_v}(x) \quad (v \in V_1, x \in V_2 \otimes W).$$

Für $v_i \in V_1$, $\tilde{v}_i \in V_2$ und $w \in W$ gilt

$$\begin{aligned}
\beta\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \tilde{v}_i, w\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \beta(v_i \otimes \tilde{v}_i, w) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{v_i}(\tilde{v}_i, w) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{\beta_{v_i}}(\tilde{v}_i \otimes w) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\beta}(v_i \otimes (\tilde{v}_i \otimes w)) \\
&= \overline{\beta}\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes (\tilde{v}_i \otimes w)\Big) \\
&= \overline{\beta} \circ \tau\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \tilde{v}_i, w\Big)
\end{aligned}$$

und es ist also $\beta = \overline{\beta} \circ \tau$. $\overline{\beta}$ ist durch β und τ vollständig bestimmt, und somit ist $(V_1 \otimes (V_2 \otimes W), \tau)$ ein Tensorprodukt von $V_1 \otimes V_2$ und W. Damit folgt die Behauptung wegen Eindeutigkeit des Tensorprodukts.

f) Wir definieren die Abbildung $\beta : V_1^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ wie in der Aufgabenstellung durch $\beta(f, w)(v) = f(v)w$.

- Die Abbildung ist wohldefiniert, denn für alle $f \in V_1^*$, $w \in W$ und $v \in V_1$ gilt $f(v) \in \mathbb{K}$ und folglich $f(v)w \in W$, sowie auch für $v_1, v_2 \in V_1$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ aufgrund der Linearität von f gilt

  $$\begin{aligned}
  \beta(f, w)(v_1 + \lambda v_2) &= f(v_1 + \lambda v_2)w = (f(v_1) + \lambda f(v_2))w \\
  &= f(v_1)w + \lambda(f(v_2)w) = \beta(f, w)(v_1) + \lambda\beta(f, w)(v_2).
  \end{aligned}$$

  Also ist $\beta(f, w) \in \mathrm{Hom}(V, W)$.
- Die Abbildung β ist bilinear:

  $$\begin{aligned}
  \beta(f_1 + \lambda f_2, w_1)(v) &= (f_1 + \lambda f_2)(v)w_1 \\
  &= (f_1(v) + \lambda f_2(v))w_1 \\
  &= f_1(v)w_1 + \lambda f_2(v)w_1 \\
  &= \beta(f_1, w_1)(v) + \lambda\beta(f_2, w_1)(v) \\
  \beta(f_1, w_1 + \lambda w_2)(v) &= f_1(v)(w_1 + \lambda w_2) \\
  &= f_1(v)w_1 + \lambda f_1(v)w_2 \\
  &= \beta(f_1, w_1)(v) + \lambda\beta(f_1, w_2)(v)
  \end{aligned}$$

für alle $f_1, f_2 \in V^*$, $w_1, w_2 \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und beliebiges $v \in V$. Also gelten

$$\begin{aligned}\beta(f_1 + \lambda f_2, w_1) =& \beta(f_1, w_1) + \lambda\beta(f_2, w_1),\\ \beta(f_1, w_1 + \lambda w_2) =& \beta(f_1, w_1) + \lambda\beta(f_1, w_2).\end{aligned}$$

Folglich ist β bilinear.

Unter Verwendung der universellen Eigenschaft von $V_1^* \otimes W$ existiert also genau eine Abbildung $\overline{\beta} : V_1^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$, sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} V_1^* \times W \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varkappa"'] & \mathrm{Hom}(V_1, W) \\ V_1^* \otimes W \arrow[ur, "\overline{\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

bzw. sodass $\overline{\beta}(f \otimes w)(v) = f(v)w$.

Wir müssen zeigen, dass $\overline{\beta}$ injektiv ist. Sei $\sum_{i=1}^m f_i \otimes w_i \in \mathrm{Ker}\overline{\beta}$. Wähle eine Basis $\{g_1, \dots, g_{n_1}\}$ von $\mathrm{span}\{f_1, \dots, f_m\}$ bestehend aus n_1 Elementen, sowie eine Basis $\{\omega_1, \dots, \omega_{n_2}\}$ von $\mathrm{span}\{w_1, \dots, w_m\}$ bestehend aus n_2 Elementen und schreibe

$$\sum_{i=1}^m f_i \otimes w_i = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{ij} g_i \otimes \omega_j = \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{g}_j \otimes \omega_j,$$

wobei $\tilde{g}_j = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{ij} g_i \in V_1^*$. Nach Voraussetzung ist

$$\overline{\beta}\Big(\sum_{j=1}^{n_2} \tilde{g}_j \otimes \omega_j\Big)(v) = \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{g}_j(v)\omega_j = 0$$

für alle $v \in V_1$, und somit gilt aufgrund der linearen Unabhängigkeit der $\{\omega_1, \dots, \omega_{n_2}\}$, dass für alle $v \in V_1^*$ gilt $\tilde{g}_j(v) = 0$. Insbesondere ist also $\tilde{g}_j = 0$ und folglich

$$0 = \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{g}_j \otimes \omega_j = \sum_{i=1}^m f_i \otimes w_i.$$

Insbesondere ist also $\mathrm{Ker}\overline{\beta} = \{0\}$.

Bemerkung: Falls V, W endlichdimensional sind, folgt aus Dimensionsgründen $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$ und insbesondere $\mathrm{End}(V) \cong V^* \otimes V$.

4. Sei $(a_{kl})_{1 \le k,l \le n} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ die Basiswechselmatrix $Q = [I_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$- zu $\mathcal{B}'$-Koordinaten. Dann gilt

$$t = \sum_{i,j=1}^n \alpha'_{ij}\Big(\sum_{k=1}^n a_{ki}v_k\Big) \otimes \Big(\sum_{l=1}^n a_{lj}v_l\Big) = \sum_{k,l=1}^n \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ki}\alpha'_{ij}a_{lj}\Big)v_k \otimes v_l.$$

Siehe nächstes Blatt!

Da die Menge $\{v_i \otimes v_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ eine Basis von $V \otimes V$ ist, folgt also

$$\alpha_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ki}\alpha_{ij}a_{li} = (QBQ^T)_{kl}$$

und folglich ist $A = QBQ^T$.

5. a) Da $V \otimes \mathbb{C}$ ein reeller Vektorraum ist, ist eine additive Struktur auf $V \otimes \mathbb{C}$ bereits definiert. Wir müssen also nur eine skalare Multiplikation von $\mathbb{C}$ auf $V \otimes \mathbb{C}$ definieren, und zeigen, dass diese die Vektorraumaxiome 5 bis 8 erfüllt.

Für $s, z \in \mathbb{C}$ und $v \in V$ sei

$$z(v \otimes s) = v \otimes (zs).$$

Wir behaupten, dass diese skalare Aktion von $\mathbb{C}$ auf $V \otimes \mathbb{C}$ eine Vektorraumstruktur definiert. Hierfür definieren wir sie nochmals sauber, unter Verwendung der universellen Eigenschaft.

Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Wir definieren eine Abbildung $z : V \times \mathbb{C} \to V \otimes \mathbb{C}$ durch $z(v, s) = v \otimes (zs)$. Diese Abbildung ist sicherlich bilinear, folglich existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $z : V \otimes \mathbb{C} \to V \otimes \mathbb{C}$, sodass $z(v \otimes s) = v \otimes (zs)$. Dies zeigt, dass die oben definierte Abbildung tatsächlich wohldefiniert und linear ist. Letzteres bedeutet insbesondere, dass

$$z(u_1 + u_2) = z(u_1) + z(u_2)$$

und somit Vektorraumaxiom 7 erfüllt ist.

Da für $z = 1$ gilt $z(v \otimes s) = v \otimes (zs) = v \otimes s$ und weil die Multiplikation durch das Tensorprodukt eindeutig bestimmt ist, gilt $1(z \otimes s) = \mathrm{id}_{V\otimes\mathbb{C}}(z \otimes s)$, wie durch Vektorraumaxiom 5 gefordert.

Wir haben in Aufgabe 3.d) gezeigt, dass die Abbildung $\beta \mapsto \overline{\beta}$ linear ist, was angewandt auf unseren Fall zeigt, dass $(z_1 + z_2)(u) = z_1(v) + z_2(u)$ für alle $u \in V \otimes \mathbb{C}$ und für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt. Insbesondere gilt also Vektorraumaxiom 8.

Schliesslich gilt für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, dass

$$(z_1z_2)(v \otimes s) = v \otimes (z_1z_2)s = v \otimes z_1(z_2s) = z_1(v \otimes z_2s) = z_1(z_2(v \otimes s))$$

und somit gilt Vektorraumaxiom 6, aufgrund der Eindeutigkeit.

Insbesondere ist $V \otimes \mathbb{C}$ zusammen mit der Aktion von $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Wegen der Linearität gilt

$$z\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes s_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes zs_i.$$

Bitte wenden!

b) Wir definieren $i : V \to V \otimes \mathbb{C}$ durch $i(v) = v \otimes 1$. Seien $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist

$$i(v_1 + \lambda v_2) = (v_1 + \lambda v_2) \otimes 1 = v_1 \otimes 1 + \lambda v_2 \otimes 1 = i(v_1) + \lambda i(v_2).$$

Somit ist i ein Homomorphismus zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Die Abbildung ist injektiv und also eine Einbettung. Dies sieht man wie folgt: Falls $v \in \mathrm{Ker}(V)$ ist, dann ist $0 = i(v) \otimes 1$. Da $1 \in \mathbb{C} \neq 0$ ist, folgt aus $0 = i(v) = v \otimes 1$, dass $v = 0$, wie in der Vorlesung gezeigt wurde. Insbesondere ist i also injektiv und somit eine Einbettung.

c) Sei $V_r = \mathrm{span}\{v \otimes 1 \mid v \in V\}$ und sei $V_i = \mathrm{span}\{v \otimes \mathrm{i} \mid v \in V\}$. Wir wissen aus der vorangehenden Aufgabe, dass V_r ein $\mathbb{R}$-Unterraum von $V \otimes \mathbb{C}$ ist. Analog zeigt man, dass V_i ein $\mathbb{R}$-Unterraum ist.

Wir zeigen, dass $V_r \cap V_i = \{0\}$. Sei $u \in V_r \cap V_i$. Aufgrund der Bilinearität der Abbildung $(v, s) \mapsto v \otimes s$ wissen wir, dass sich jedes Element $u \in V_r$ von der Form $v \otimes 1$ schreiben lässt für ein $v \in V$ und analog ist $u = w \otimes \mathrm{i}$ für ein $w \in V$. Da $v \otimes 1 = w \otimes \mathrm{i}$, ist also $v \otimes 1 - w \otimes \mathrm{i}$ ein reiner Tensor, da die $0 \in V \otimes \mathbb{C}$ sich immer als reiner Tensor schreiben lässt. Da 1 und i in $\mathbb{C}$ linear unabhängig sind über $\mathbb{R}$, folgt aus Proposition 6 in §10.1, dass v und w linear abhängig sind. Sei also $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $w = \lambda v$, dann folgt

$$0 = v \otimes 1 - w \otimes \mathrm{i} = v \otimes (1 - \lambda \mathrm{i}) = (1 - \lambda \mathrm{i})(v \otimes 1),$$

und weil $1 - \lambda \mathrm{i} \in \mathbb{C}^\times$ ist, folgt also $v \otimes 1 = 0$. Es ist also $V_r \cap V_i = \{0\}$.

Um zu zeigen, dass $V_r \oplus V_i = V \otimes \mathbb{C}$ ist, reicht es zu zeigen, dass $V_r \oplus V_i$ ein Erzeugendensystem von $V \otimes \mathbb{C}$ enthält. Tatsächlich enthält $V_r \oplus V_i$ alle reinen Tensoren, denn für $v \in V$ und $s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} v \otimes s =& v \otimes (\mathrm{Re}(s) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(s)) \\ =& \mathrm{Re}(s)(v \otimes 1) + \mathrm{Im}(s)(v \otimes \mathrm{i}) \\ =& (\mathrm{Re}(s)v) \otimes 1 + (\mathrm{Im}(s)v) \otimes \mathrm{i} \in V_r + V_s \end{aligned}$$

und da die reinen Tensoren $V \otimes \mathbb{C}$ erzeugen, folgt die Behauptung.

d) Definiere $T_{\mathrm{Bil}} : V \times \mathbb{C} \to W \otimes \mathbb{C}$ durch

$$T_{\mathrm{Bil}}(v, s) = T(v) \otimes s \quad (v \in V, s \in \mathbb{C}).$$

Diese Abbildung ist sicherlich bilinear, und folglich existiert genau eine lineare Abbildung $T_{\mathbb{C}} : V \otimes \mathbb{C} \to W \otimes \mathbb{C}$, sodass $T_{\mathbb{C}}(v \otimes s) = T_{\mathrm{Bil}}(v, s)$. Das heisst, das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \times \mathbb{C} \arrow[r, "T_{\mathrm{Bil}}"] \arrow[d] & W \otimes \mathbb{C} \\ V \otimes \mathbb{C} \arrow[ur, "\exists! T_{\mathbb{C}}"'] & \end{tikzcd}$$

Siehe nächstes Blatt!

Es gilt

$$T_{\mathbb{C}} \circ i(v) = T_{\mathbb{C}}(v \otimes 1) = T(v) \otimes 1 = i \circ T(v) \quad (v \in V)$$

wie gewünscht.