

Lösung 15: Repetitionsserie

1. a) Wir zeigen die gewünschten Eigenschaften:

1. Es ist

$$\varepsilon(\text{id}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\text{id}(j) - \text{id}(i)}{j - i} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{j - i}{j - i} = 1.$$

2. Es ist

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau \circ \sigma) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{j - i} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\ &= \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \right) \\ &= \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \right) \end{aligned}$$

und es reicht also zu zeigen, dass für alle $\tau, \sigma \in S_n$ die Gleichung

$$\varepsilon(\tau) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)}$$

gilt.

Hierfür bemerken wir, dass für alle $1 \leq k < l \leq n$ gilt

$$\frac{\tau(k) - \tau(l)}{k - l} = \frac{\tau(l) - \tau(k)}{l - k}.$$

Die Abbildung $\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\} \rightarrow \{(\sigma(i), \sigma(j)) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ gegeben durch $(i, j) \mapsto (\sigma(i), \sigma(j))$ ist sicherlich injektiv, denn $(\sigma(i), \sigma(j)) = (\sigma(k), \sigma(l))$ impliziert $\sigma(i) = \sigma(k)$ und $\sigma(j) = \sigma(l)$ und

Bitte wenden!

folglich $i = k$ und $j = l$, da σ injektiv ist. Seien $1 \leq k < l \leq n$, dann ist genau eines der Tupel (k, l) oder (l, k) im Bild der Abbildung enthalten. Seien nämlich $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ die eindeutigen Elemente, sodass $\sigma(i) = k$ und $\sigma(j) = l$, dann ist (k, l) genau dann im Bild enthalten, wenn $i < j$, bzw. (l, k) genau dann im Bild enthalten, wenn $j < i$ gilt. Insbesondere ist also

$$\prod_{\{(\sigma(i), \sigma(j)) \mid 1 \leq i < j \leq n\}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} = \prod_{\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i}$$

und somit folgt die Behauptung.

3. Wir beweisen dies mittels Induktion über n . Falls $n = 2$ ist, dann ist

$$\varepsilon(\tau) = \frac{1 - 2}{2 - 1} = -1,$$

da $\tau(1) = 2, \tau(2) = 1$ die einzige Transposition auf der Menge $\{1, 2\}$ ist. Sei die Aussage also wahr für Transpositionen auf der Menge S_n und sei $\tau \in S_{n+1}$ eine Transposition. Falls $\tau(n+1) = n+1$, dann gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \\ &= \underbrace{\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \right)}_{=\varepsilon(\tau|_{\{1, \dots, n\}})} \underbrace{\left(\prod_{1 \leq i \leq n} \frac{n+1 - \tau(i)}{n+1 - i} \right)}_{=1} = -1, \end{aligned}$$

da $\tau|_{\{1, \dots, n\}}$ nach Voraussetzung ein Element in S_n und eine Transposition ist. Sei nun also $\tau(n+1) = i$ für ein $1 \leq i \leq n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau) &= \left(\prod_{1 \leq k \leq n} \frac{i - \tau(k)}{n+1 - k} \right) \left(\prod_{1 \leq k < l \leq n} \frac{\tau(l) - \tau(k)}{l - k} \right) \\ &= \left(\prod_{1 \leq k \leq n} \frac{i - \tau(k)}{n+1 - k} \right) \left(\prod_{i < l \leq n} \underbrace{\frac{\tau(l) - n+1}{l - i}}_{=\frac{n+1-l}{i-l}} \right) \left(\prod_{1 \leq k < i} \underbrace{\frac{n+1 - \tau(k)}{i - k}}_{=\frac{n+1-k}{i-k}} \right) \\ &= \frac{i - n + 1}{n + 1 - i} \left(\prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{i - k}{n + 1 - k} \right) \left(\prod_{i < k \leq n} \frac{n + 1 - k}{i - k} \right) \left(\prod_{1 \leq k < i} \frac{n + 1 - k}{i - k} \right) \\ &= \frac{i - n + 1}{n + 1 - i} = -1, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass für $1 \leq k < l \leq n$ gilt $\frac{\tau(l) - \tau(k)}{l - k} = 1$ ausser genau eines der k oder l ist gleich i .

Siehe nächstes Blatt!

4. Falls $n = 1$, dann ist per definitionem

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq 1} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \quad (\sigma \in S_1)$$

ein Produkt über die leere Menge, und somit $\varepsilon(S_n) = \{1\}$. Sei also $n \geq 2$. Wir zeigen, dass sich jedes Element in $S_n \setminus \{\text{id}\}$ als Komposition von Transpositionen schreiben lässt.

Sei $\sigma \in S_n$, dann ist $D(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) \neq i\}$ die Menge der nicht-Fixpunkte von σ und $N(\sigma) = |D(\sigma)|$ die Kardinalität dieser Menge. Beachte, dass $\sigma \neq \text{id} \Rightarrow N(\sigma) \geq 2$, denn für $i \in D(\sigma)$ gilt $\sigma(i) \in D(\sigma)$ wegen der Injektivität von σ . Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über $N(\sigma)$. Falls $N(\sigma) = 2$ ist, dann ist σ eine Transposition und wir sind fertig.

Sei also $m \in \mathbb{N}$ und es gelte, dass sich jedes Element $\sigma' \in S_n$ mit $N(\sigma') \leq m$ als Komposition von Transpositionen schreiben lässt. Sei $\sigma \in S_n$ mit $N(\sigma) \leq m + 1$ und sei $i \in D(\sigma)$. Sei $j = \sigma(i)$. Definiere eine Transposition

$$\tau(k) = \begin{cases} i & \text{falls } k = j \\ j & \text{falls } k = i \\ k & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $N(\tau \circ \sigma) < N(\sigma)$. Sei nämlich $k \notin D(\sigma)$, dann ist $\tau \circ \sigma(k) = \tau(k)$ und da $i \in D(\sigma)$ und somit $j = \sigma(i) \in D(\sigma)$, ist $k \notin \{i, j\}$ und folglich $\tau(k) = k$. Insbesondere also $\tau \circ \sigma(k) = k$ und somit ist $D(\tau \circ \sigma) \subset D(\sigma)$ (da wie eben gezeigt $D(\sigma)^c \subset D(\tau \circ \sigma)^c$). Andererseits ist $i \in D(\sigma)$, aber

$$\tau \circ \sigma(i) = \tau(j) = i$$

nach Definition. Also ist $i \notin D(\tau \circ \sigma)$ und folglich $D(\tau \circ \sigma) \neq D(\sigma)$. Es folgt also $N(\tau \circ \sigma) \leq m$ und folglich lässt sich $\tau \circ \sigma$ als Produkt von Transpositionen schreiben. Da die Inverse einer Transposition wieder die Transposition ist, lässt sich folglich σ als Produkt von Transpositionen schreiben. Die Aussage folgt nun aus dem Induktionsaxiom.

Aus 2. folgt nun die Behauptung.

b) Wir zeigen, dass die Formel auf der rechten Seite die definierenden Eigenschaften der Determinante besitzt.

- Zuerst bemerken wir, dass für $A = I_n$ gilt

$$A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} \neq 0 \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n : \sigma(i) = i$$

und wegen Eigenschaft 1 folgt also für $A = I_n$ dass

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} = 1.$$

Bitte wenden!

- Wir zeigen die Multilinearität. Sei $A' = (A'_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ eine weitere Matrix und es gelte für ein $1 \leq j \leq n$ und ein $1 \leq i \leq n$, dass $A'_{jl} = A_{jl} + \lambda B_{jl}$ für alle $1 \leq l \leq n$ und ein $\lambda \in \mathbb{K}$, d.h. A' ist aus A entstanden durch Addition des λ -fachen der Zeile $B_{(j)}$ zur Zeile $A_{(j)}$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A'_{1\sigma(1)} \cdots A'_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots (A_{j\sigma(j)} + \lambda B_{j\sigma(j)}) \cdots A_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} \\ & \quad + \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots B_{j\sigma(j)} \cdots A_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Multilinearität.

- Wir zeigen, dass die Formel alternierend ist. Es sei $A_{(i)} = A_{(j)}$ und $\tau \in S_n$ die Transposition gegeben durch $\tau(i) = j$ und $\tau(j) = i$ für $i < j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau) A_{1\sigma(\tau(1))} \cdots A_{i\sigma(\tau(i))} \cdots A_{i\sigma(\tau(j))} \cdots A_{n\sigma(\tau(n))} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{i\sigma(j)} \cdots A_{i\sigma(i)} \cdots A_{n\sigma(n)} \\ &= - \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{i\sigma(i)} \cdots A_{i\sigma(j)} \cdots A_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

wegen Eigenschaft 3. Somit ist die Formel alternierend wenn $2 \neq 0$ ist.

Es bleibt, die Aussage im Falle $2 = 0$ zu beweisen. Hierfür liefern wir ein Argument, das auch im Allgemeinen Fall funktioniert, aber ein bisschen komplizierter ist. Sei τ wie oben. Wir betrachten die Menge

$$\Delta_\tau = \{ \{ \sigma, \sigma \circ \tau \} \mid \sigma \in S_n \} \subset \mathbb{P}S_n.$$

Man beachte, dass jedes Element in Δ_τ zwei Elemente enthält, denn es gilt

$$\sigma = \sigma \circ \tau \Rightarrow \text{id} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ (\sigma \circ \tau) = (\sigma^{-1} \circ \sigma) \circ \tau = \tau.$$

Das ist absurd.

Angenommen $\{ \sigma, \rho \}, \{ \hat{\sigma}, \hat{\rho} \} \in \Delta_\tau$ und es gilt $\{ \sigma, \rho \} \cap \{ \hat{\sigma}, \hat{\rho} \} \neq \emptyset$. Nach Umbenennung können wir annehmen, dass $\sigma = \hat{\sigma}$ und dass $\rho = \sigma \circ \tau$. Wir zeigen, dass $\rho = \hat{\rho}$ gilt. Per definitionem ist entweder $\hat{\rho} = \hat{\sigma} \circ \tau$ oder $\hat{\sigma} = \hat{\rho} \circ \tau$. Da $\tau^{-1} = \tau$, folgt im zweiten Falle, dass

$$\hat{\rho} = \hat{\rho} \circ (\tau \circ \tau) = (\hat{\rho} \circ \tau) \circ \tau = \hat{\sigma} \circ \tau$$

Siehe nächstes Blatt!

und wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\hat{\varrho} = \hat{\sigma} \circ \tau$ gilt. Somit folgt aber nach Voraussetzung, dass

$$\hat{\varrho} = \hat{\sigma} \circ \tau = \sigma \circ \tau = \varrho$$

und folglich $\{\sigma, \varrho\} = \{\hat{\sigma}, \hat{\varrho}\}$. Dies zeigt, dass die Elemente von Δ_τ disjunkt sind. Per definitionem existiert für jedes $\sigma \in S_n$ ein $A \in \Delta_\tau$, sodass σ in A ist. Also ist Δ_τ eine Partition von S_n und es folgt

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} = \sum_{A \in \Delta_\tau} \underbrace{\sum_{\sigma \in A} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)}}_{=0} = 0.$$

Die Formel definiert eine alternierende, normierte Multilinearform auf $M_{n \times n}(\mathbb{K})$ und stimmt somit wegen der Eindeutigkeit der Determinanten mit der Determinanten überein.

2. a) Sei T orthogonal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann ist $1 = \det(T^*T) = \det(T^*) \det(T)$. Für jede ONB \mathcal{B} von V (bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$) gilt $[T^*]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^T$, und folglich ist $\det(T^*) = \det([T]_{\mathcal{B}}^T) = \det([T]_{\mathcal{B}}) = \det(T)$. Insbesondere ist $\det(T) \in \{\pm 1\}$.

Dies zeigt, dass beispielsweise kein inneres Produkt auf V existiert, sodass $2I_V$ orthogonal ist. Die Aussage ist also falsch.

- b) Angenommen die Bilinearform $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ein inneres Produkt auf \mathbb{R}^2 , sodass T bezüglich β orthogonal ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \beta(e_1, e_1) &= \beta(Te_1, Te_1) = \beta(e_1, e_1) + 2\beta(e_1, e_2) + \beta(e_2, e_2), \\ \beta(e_2, e_2) &= \beta(Te_2, Te_2). \end{aligned}$$

Insbesondere ist aufgrund der ersten Gleichung

$$\beta(e_1, e_2) = -\frac{1}{2}\beta(e_2, e_2).$$

Des Weiteren gilt für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} \beta(a_1e_1 + a_2e_2, a_1e_1 + a_2e_2) &= a_1^2\beta(e_1, e_1) + 2a_1a_2\beta(e_1, e_2) + a_2^2\beta(e_2, e_2) \\ \beta(T(a_1e_1 + a_2e_2), T(a_1e_1 + a_2e_2)) &= \beta(a_1e_1 + (a_1 + a_2)e_2, a_1e_1 + (a_1 + a_2)e_2) \\ &= a_1^2\beta(e_1, e_1) + 2a_1(a_1 + a_2)\beta(e_1, e_2) + (a_1 + a_2)^2\beta(e_2, e_2) \\ &= a_1^2\beta(e_1, e_1) + 2a_1a_2\beta(e_1, e_2) + 2a_1a_2\beta(e_2, e_2) + a_2^2\beta(e_2, e_2). \end{aligned}$$

Da T nach Voraussetzung orthogonal ist bezüglich β , gilt insbesondere für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$0 = 2a_1a_2\beta(e_2, e_2).$$

Das impliziert $\beta(e_2, e_2) = 0$ im Widerspruch zur Annahme, dass β ein inneres Produkt ist.

Bitte wenden!

c) Wir bemerken zuerst, dass A diagonalisierbar ist, denn

$$\text{char}_T(X) = -(5 - X)(5 + X) + 24 = (X + 1)(X - 1),$$

und somit besitzt T zwei verschiedene reelle Eigenwerte.

Eine (geordnete) Basis von \mathbb{R}^2 bestehend aus Eigenvektoren von T ist gegeben durch

$$\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Wir definieren nun eine Bilinearform $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $\beta(v_i, v_j) = \delta_{ij}$, d.h. $[\beta]_{\mathcal{B}} = I_2$, womit β positiv definit ist, und \mathcal{B} ist eine ONB bezüglich β . Zudem ist für $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

$$\beta(Tv_i, Tv_j) = \beta(\lambda_i v_i, \lambda_j v_j) = \lambda_i \lambda_j \delta_{ij}.$$

Es ist also das Bild der ONB \mathcal{B} unter T eine ONB (bezüglich β) und folglich ist T orthogonal.

Um β zu konstruieren, verwenden wir

$$[\beta]_{\mathcal{E}_2} = ([I_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{B}})^T [\beta]_{\mathcal{B}} [I_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{B}} = ([I_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{B}})^T [I_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{B}},$$

und mit

$$[I_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{B}} = ([I_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt also

$$[\beta]_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das innere Produkt β ist also gegeben durch

$$\beta(v, w) = v^T \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} w.$$

Nun ist T bezüglich β orthogonal, denn für alle $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ gilt nach Konstruktion

$$\begin{aligned} \beta(T(a_1 v_1 + a_2 v_2), T(b_1 v_1 + b_2 v_2)) &= \beta(a_1 v_1 - a_2 v_2, b_1 v_1 - b_2 v_2) \\ &= a_1 b_1 \beta(v_1, v_1) - a_1 b_2 \beta(v_1, v_2) - a_2 b_1 \beta(v_2, v_1) + b_2^2 \beta(v_2, v_2) \\ &= a_1 b_1 \beta(v_1, v_1) + a_1 b_2 \beta(v_1, v_2) + a_2 b_1 \beta(v_2, v_1) + b_2^2 \beta(v_2, v_2) \quad (\star) \\ &= \beta(a_1 v_1 + a_2 v_2, b_1 v_1 + b_2 v_2), \end{aligned}$$

wobei wir in (\star) verwendet haben, dass $\beta(v_1, v_2) = \beta(v_2, v_1) = 0$.

Siehe nächstes Blatt!

d) Obiges Beispiel suggeriert das folgende hinreichende Kriterium:

Proposition: Sei $T \in \text{End}(V)$. Falls T diagonalisierbar ist mit Eigenwerten $\sigma(T) \subset \{\pm 1\}$, dann existiert ein inneres Produkt auf V , für welches T orthogonal ist.

Zum Beweis sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von T , d.h. $Tv_i = \lambda_i v_i$ für ein $\lambda_i \in \{\pm 1\}$. Sei $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ die symmetrische Bilinearform gegeben durch

$$[\beta]_{\mathcal{B}} = I_n.$$

Dann ist β positiv definit und \mathcal{B} ist eine ONB bezüglich dem inneren Produkt β auf V . Es gilt für alle $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, $w = \sum_{i=1}^n b_i v_i$

$$\begin{aligned} \beta(Tv, Tw) &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \beta(Tv_i, Tv_j) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \beta(\lambda_i v_i, \lambda_j v_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \lambda_i \lambda_j \beta(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \underbrace{\lambda_i \lambda_j}_{=\delta_{ij}} \delta_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \beta(v_i, v_j) = \beta(v, w) \end{aligned}$$

und folglich ist T bezüglich β orthogonal.

3. Im Folgenden seien $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$.

a) Seien \mathcal{B}, \mathcal{C} geordnete Basen von V und W . Dann existieren $D \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ mit $D_{ij} = 0$ wann immer $i \neq j$ und $D_{i,i} \geq D_{i+1,i+1}$ für alle $1 \leq i < \min\{m, n\}$, sowie orthogonale Matrizen $Q \in O(n)$ und $R \in O(m)$, sodass

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = RDQ^T$$

gilt. Da R, Q invertierbar sind, ist

$$1 = \text{Rang}(T) = \text{Rang}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) = \text{Rang}(D)$$

und nach Voraussetzung ist $\text{Rang}(D)$ gleich der Anzahl von null verschiedener Diagonaleinträge von D . Insbesondere wissen wir also, dass $D_{ij} = 0$ wann immer $(i, j) \neq (1, 1)$. Seien $Q = (v_1 \mid \dots \mid v_n)$ und $R = (w_1 \mid \dots \mid w_m)$, sowie $u \in V$ beliebig, dann ist

$$[Tu]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}} = RDQ^T[u]_{\mathcal{B}} = R \begin{pmatrix} D_{11}v_1^T \\ 0_{m-1 \times n} \end{pmatrix} [u]_{\mathcal{B}}$$

Bitte wenden!

$$= R \begin{pmatrix} D_{11} v_1^T [u]_{\mathcal{B}} \\ 0_{m-1 \times 1} \end{pmatrix} = (D_{11} v_1^T [u]_{\mathcal{B}}) R^{(1)} = (D_{11} v_1^T [u]_{\mathcal{B}}) w_1.$$

Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ die Darstellungsmatrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ bezüglich \mathcal{B} , d.h. für alle $u_1, u_2 \in V$ gilt $\langle u_1, u_2 \rangle_V = [u_1]_{\mathcal{B}}^T A [u_2]_{\mathcal{B}}$. Da A positiv definit ist, ist A (beispielsweise als Korollar zum Hauptsatzsatz) invertierbar. Somit ist $\tilde{v} = D_{11} A^{-1} v_1$ wohldefiniert, und es ist

$$[Tu]_{\mathcal{C}} = (\tilde{v}^T A [u]_{\mathcal{B}}) w_1.$$

Da die Koordinatenabbildungen Isomorphismen sind, existieren eindeutig bestimmte $v \in V$ und $w \in W$, sodass $\tilde{v} = [v]_{\mathcal{B}}$ und $w_1 = [w]_{\mathcal{C}}$ gelten. Somit ist

$$[Tu]_{\mathcal{C}} = ([v]_{\mathcal{B}}^T A [u]_{\mathcal{B}}) [w]_{\mathcal{C}} = \langle v, u \rangle_V [w]_{\mathcal{C}} = [\langle u, v \rangle_V w]_{\mathcal{C}}$$

und insbesondere $Tu = \langle u, v \rangle_V w$. Da v und w durch Q, R, D und A vollständig bestimmt sind, insbesondere also nicht von u abhängen, und da u beliebig war, folgt

$$\forall u \in V : Tu = \langle u, v \rangle_V w.$$

Falls $v = 0$ oder $w = 0$, dann ist $Tu = 0$ für alle $u \in V$ und somit $T \equiv 0$, bzw. $\text{Rang}(T) = 0$. Das steht im Widerspruch zu den Voraussetzungen, und somit gelten $v \neq 0, w \neq 0$.

- b) Seien $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n), \mathcal{C}' = (w_1, \dots, w_m)$ ONB von V bzw. von W , sodass $v_1 = \frac{1}{\|v\|_V} v$ und $w_1 = \frac{1}{\|w\|_W} w$, welche existieren, da $v \neq 0$ sowie $w \neq 0$ gelten. Dann ist

$$Tu = \langle u, v \rangle_V w = \|v\|_V \|w\|_W \langle u, v_1 \rangle_V w_1.$$

Man beachte, dass die Darstellungsmatrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ bezüglich \mathcal{B} nach Konstruktion die Identität ist, d.h. $\langle u_1, u_2 \rangle_V = [u_1]_{\mathcal{B}}^T [u_2]_{\mathcal{B}}$ für alle $u_1, u_2 \in V$. Insbesondere ist also

$$\begin{aligned} [Tu]_{\mathcal{C}} &= \|v\|_V \|w\|_W \langle u, v_1 \rangle_V [w_1]_{\mathcal{C}} \\ &= (\|v\|_V \|w\|_W [v_1]_{\mathcal{B}}^T [u]_{\mathcal{B}}) [w_1]_{\mathcal{C}} = \tilde{R} \tilde{D} \tilde{Q}^T [u]_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{R} = ([w_1]_{\mathcal{C}} \mid \dots \mid [w_m]_{\mathcal{C}})$, $D \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ mit $D_{ij} = \|v\|_V \|w\|_W \delta_{i1} \delta_{j1}$ für $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, und $Q = ([v_1]_{\mathcal{B}} \mid \dots \mid [v_n]_{\mathcal{B}})$.

- c) Seien $u \in V, \tilde{w} \in W$, dann ist

$$\langle Tu, \tilde{w} \rangle_W = \langle u, v \rangle_V \langle w, \tilde{w} \rangle_W = \langle u, \langle \tilde{w}, w \rangle_W v \rangle_V,$$

sodass $T^* \tilde{w} = \langle \tilde{w}, w \rangle_W v$ gilt.

Siehe nächstes Blatt!

4. a) Bezüglich der Standardbasis ist die Darstellungsmatrix von Q gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Unter Verwendung des symmetrischen Gaussverfahrens erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{S_3 \rightarrow S_1 + S_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_1 + Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{S_3 \rightarrow -S_2 + S_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{Z_3 \rightarrow -S_2 + S_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Folglich ist A kongruent zur Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Signatur einer symmetrischen Matrix (bzw. die Signatur der zugehörigen quadratischen Form) unter Kongruenz invariant ist, und da A' Signatur $(3, 0)$ besitzt, ist auch die Signatur von Q gleich $(3, 0)$. Insbesondere ist Q positiv definit.

c) Aus der obigen Rechnung wissen wir, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

eine Cholesky-Zerlegung von A . Da $\det(A) \neq 0$, gilt $\det(R) \neq 0$ für jede Cholesky Zerlegung $A = R^T R$. Sei also $A = Q^T Q$ eine weitere Cholesky-Zerlegung. Da Inversen invertierbarer oberer Dreiecksmatrizen obere Dreiecksmatrizen sind, ist also $I_3 = (Q^T)^{-1} R^T R Q^{-1}$. Insbesondere gilt also die Gleichung $((RQ^{-1})^T)^{-1} = RQ^{-1}$. Weil RQ^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist, ist folglich $(RQ^{-1})^T$ eine untere Dreiecksmatrix und da die Inverse einer unteren Dreiecksmatrix eine untere Dreiecksmatrix ist, ist also $((RQ^{-1})^T)^{-1}$ und somit RQ^{-1} eine untere Dreiecksmatrix. Eine Matrix, die gleichzeitig eine obere und eine untere Dreiecksmatrix ist, ist eine Diagonalmatrix und also ist RQ^{-1} eine Diagonalmatrix. Da $I_3 = (RQ^{-1})^T (RQ^{-1})$ ist, sind die Diagonaleinträge von RQ^{-1} Quadratwurzeln von 1 und da die Diagonaleinträge von R und von Q^{-1} nicht-negativ sind, sind auch die Diagonaleinträge von RQ^{-1} nicht-negativ und insbesondere nicht-negative Quadratwurzeln von 1. Somit sind aber alle Diagonaleinträge von RQ^{-1} gleich 1 und insbesondere also $R = Q$. Dies zeigt, dass die Cholesky-Zerlegung von A durch A eindeutig bestimmt ist.

5. Da A blockdiagonal ist, reicht es, die JNF sowie die Basen für die Blöcke bzw. für die entsprechenden invarianten Unterräume zu bestimmen.

Das charakteristische Polynom von

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

ist

$$\text{char}_{A_1}(X) = (X + 1)^2$$

und somit besitzt A_1 den doppelten Eigenwert -1 . Man berechnet

$$A_1 - (-1)I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

d.h. $A_1 - (-1)I_2$ hat Rang 1 und somit ist die geometrische Multiplizität des Eigenwertes -1 nicht gleich der algebraischen Multiplizität. Folglich ist A_1 ähnlich zu $J_{2,-1}$. Wir bestimmen eine Jordan-Basis. Der Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt im Kern von $A_1 + I_2$ und ist also ein Eigenvektor von A_1 zum Eigenwert -1 . Wir wissen, dass $\text{span}(\{e_1, e_2\})$ der Hauptraum zum Eigenwert -1 ist, da $\{e_1, e_2\}$ den gesamten Raum aufspannt und der Eigenwert -1 der einzige Eigenwert von A_1 ist. Da e_2 und $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, ist $v_2 = v_1 + e_2 \notin \text{Ker}(A_1)$ und folglich $((A_1 + I_2)v_2, v_2)$ eine Jordanbasis von $\text{span}(\{e_1, e_2\})$.

Ähnlich argumentiert man für den zweiten Block, wobei wir in diesem Fall ein wenig systematischer vorgehen wollen.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Das charakteristische Polynom von A_2 ist

$$\text{char}_{A_2}(X) = -(X - 2)^3$$

und somit ist 2 ein dreifacher Eigenwert von A_2 . Man berechnet

$$A_2 - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Rang 2 und folglich ist $\dim \text{Ker}(A_2 - 2I_3) = 1$. Insbesondere ist A_2 ähnlich zu $J_{3,2}$. Wir bestimmen eine Jordan-Basis, indem wir einen Zyklus $((A_2 - 2I_3)^2 v_1, (A_2 - 2I_3)v_1, v_1)$ bestimmen. Hierfür lösen wir eine Folge von Gleichungssystemen, d.h. wir bestimmen zuerst $v_3 = (A_2 - 2I_3)^2 v_1 \in \text{Ker}(A_2 - 2I_3)$, dann $v_2 = (A_2 - 2I_3)v_1$ durch Lösen des inhomogenen Systems $(A_2 - 2I_3)v_2 = v_3$ und schlussendlich v_1 durch Lösen des Systems $(A_2 - 2I_3)v_1 = v_2$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_3 \mapsto Z_3 + 2Z_1} \\ \xrightarrow{Z_2 \mapsto Z_2 - Z_1} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_3 \mapsto Z_3 + Z_2} \\ \xrightarrow{} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -1 & -2 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_3 \mapsto Z_3 + 2Z_1} \\ \xrightarrow{Z_2 \mapsto Z_2 - Z_1} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & -1 \\ -1 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_3 \mapsto Z_3 + Z_2} \\ \xrightarrow{} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & -2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_3 \mapsto Z_3 + 2Z_1} \\ \xrightarrow{Z_2 \mapsto Z_2 - Z_1} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ -1 & 0 & -1 & | & -2 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_3 \mapsto Z_3 + Z_2} \\ \xrightarrow{} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also die Jordanbasis

$$\mathcal{B}_2 = \left(v_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)$$

für \mathbb{R}^3 (bezüglich A_2).

Beides zusammen liefert, dass

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und die Jordanbasis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

6. a) Wir argumentieren unter Verwendung der Tatsache, dass das standard innere Produkt auf \mathbb{C}^n nicht ausgeartet ist, i.e. für alle $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ existiert ein $u \in \mathbb{C}^n$ sodass $u^*v \neq 0$. Dies liefert

$$\begin{aligned} v \in \text{Ker}(L_B) &\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{C}^n : u^*L_B(v) = 0 \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{C}^n : u^*Bv = 0 \\ &\stackrel{(XY)^*=Y^*X^*}{\Leftrightarrow} \forall u \in \mathbb{C}^n : (B^*u)^*v = 0 \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{C}^n : (L_{B^*}(u))^*v = 0 \\ &\stackrel{(X^*)^*=X}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \forall w \in \text{Im}(L_{B^*}) : w^*v = 0 \Leftrightarrow v \in \text{Im}(L_{B^*})^\perp. \end{aligned}$$

- b) Wir wollen T durch die lineare Erweiterung von $T(v_i) = w_i$ auf dem Unterraum $U = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$ und durch die triviale Abbildung auf U^\perp definieren. Dies ist im Allgemeinen nicht wohldefiniert, da wir nicht angenommen haben, dass v_1, \dots, v_m linear unabhängig sind, d.h. es ist ex ante durchaus möglich, dass zwei verschiedene Linearkombinationen existieren, die denselben Vektor repräsentieren, welche unter Umständen unter der linearen Erweiterung auf verschiedene

Siehe nächstes Blatt!

Elemente in V abgebildet würden. Wir müssen also zeigen, dass die Abbildung unter der zusätzlichen Annahme aus der Aufgabenstellung wohldefiniert ist, d.h. falls $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ und $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}$ sind, sodass

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = b_1 v_1 + \dots + b_m v_m$$

gilt, dann ist auch

$$a_1 w_1 + \dots + a_m w_m = b_1 w_1 + \dots + b_m w_m.$$

Hierfür reicht es zu zeigen, dass

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0 \Rightarrow a_1 w_1 + \dots + a_m w_m = 0$$

gilt. Seien also solche $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ gegeben, dann ist

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^m a_i w_i, \sum_{i=1}^m a_i w_i \right\rangle_W &= \sum_{i,j=1}^m \bar{a}_i a_j \langle w_i, w_j \rangle_W \\ &= \sum_{i,j=1}^m \bar{a}_i a_j \langle v_i, v_j \rangle_V \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^m a_i v_i, \sum_{i=1}^m a_i v_i \right\rangle_V = 0. \end{aligned}$$

c) Wir befolgen den Hinweis.

1. Sei $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Sl}_2(\mathbb{R})$. Wir gehen rückwärts vor, d.h. wir angeln uns jeweils von einem einfachen Fall, wo die Aussage leicht zu zeigen ist, zum nächst komplizierteren.

Sei zuerst $d = 1$, dann ist

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+bc & b \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

wegen $1 = ad - bc = a - bc$. Somit ist die Aussage für den Spezialfall $d = 1$ gezeigt und in diesem Fall gilt die Formel $g = u_b v_c$.

Das heisst, es reicht zu zeigen, dass Elemente $u_t \in N$ und $v_s \in N^-$ existieren, sodass $g v_s u_t$ von der obigen Form, d.h. $d = 1$, ist. Hierfür betrachten wir wieder zuerst einen Spezialfall, nämlich den Fall in welchem $c \neq 0$ ist. Man berechnet für $t = \frac{1-d}{c}$, dass

$$g u_t = \begin{pmatrix} a & a+tb \\ c & d+tc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+tb \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

und somit gilt die Aussage in diesem Fall, denn unter Verwendung des obigen Resultats folgt

$$g = (gu_t)u_t^{-1} = (u_{a+tb}v_c)u_t^{-1} = u_{a+tb}v_cu_{-t}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Aussage für Elemente der Form $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ in $\text{Sl}_2(\mathbb{R})$ gilt. In diesem Fall ist nach Voraussetzung $1 = ad - bc = ad$ und folglich ist $d \neq 0$. Wir erhalten

$$gv_1 = \begin{pmatrix} a+b & b \\ d & d \end{pmatrix}$$

und somit gilt unter Verwendung des vorangehenden Resultats mit $t = \frac{1-d}{d}$

$$g = (gv_1)v_1^{-1} = (u_{a+b+tb}v_du_{-t})v_1^{-1} = u_{a+b+tb}v_du_{-t}v_{-1}.$$

2. Da $\pi(u_t) \in \text{Gl}_n(\mathbb{C})$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$, und da v ein Eigenvektor ist, also insbesondere $v \neq 0$, ist auch $\pi(u_t)v \neq 0$ und folglich $\lambda_t \neq 0$.

Die Abbildung ist stetig, denn π ist stetig. Das heisst: Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$, sodass $\|g - u_{t_0}\|_\infty < \delta \Rightarrow \|\pi(g) - \pi(u_{t_0})\|_\infty < \frac{\varepsilon}{n}$ gilt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - t_0| < \delta$, dass

$$|\lambda_t - \lambda_{t_0}| = \frac{1}{\|v\|_\infty} \|\pi(u_t)v - \pi(u_{t_0})v\|_\infty \leq \frac{1}{\|v\|_\infty} n \|\pi(u_t) - \pi(u_{t_0})\|_\infty \|v\|_\infty < \varepsilon$$

und folglich ist λ stetig an der Stelle t_0 und da $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig war, ist λ stetig.

Um zu zeigen, dass λ ein Gruppenhomomorphismus ist, stellen wir fest dass nach Voraussetzung

$$\lambda_{s+t}v = \pi(u_{s+t})v = \pi(u_s)(\pi(u_t)v) = \lambda_t\pi(u_s)v = \lambda_s\lambda_tv$$

gilt. Folglich ist $\lambda_{s+t} = \lambda_s\lambda_t$, denn nach Annahme ist $v \neq 0$.

3. Wir bemerken, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \pi(u_t)\pi(a_2)v &= \pi(a_2)\pi(a_2^{-1}u_t a_2)v \\ &= \pi(a_2)\pi\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{u_{4t}}\right)v \\ &= \pi(a_2)\pi(u_{4t})v = \lambda_{4t}\pi(a_2)v. \end{aligned}$$

Dies zusammen mit dem vorangehenden Schritt impliziert, dass $\pi(a_2)v$ ein gemeinsamer Eigenvektor zum Eigenwert λ_t^4 ist. Es folgt aus dem Induktionsaxiom, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der Vektor $\pi(a_2^n)v$ ein gemeinsamer Eigenvektor für $\pi(N)$ ist, zum Eigenwert $\lambda_t^{2^{2n}}$ für $\pi(u_t)$ ($t \in \mathbb{R}$).

Siehe nächstes Blatt!

Falls $\lambda_{t_0} \neq 1$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist $\lambda_{-t_0} \neq 1$, da

$$I_n = \pi(I_2) = \pi(u_{t_0})\pi(u_{-t_0}).$$

Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass $t_0 > 0$ ist. Sei $\omega_0 \in (0, 2\pi)$ mit $\lambda_{t_0} = e^{i\omega_0}$ (Eigenwerte unitärer Operatoren haben Absolutbetrag gleich 1). Da \mathbb{R} zusammenhängend ist und die Abbildung $t \mapsto \lambda_t$ stetig ist, existieren $t_1 \in (0, t_0)$ und ein $\omega_1 \in (0, \omega_0)$, sodass $\lambda_{t_1} = e^{i\omega_1}$ gilt und $\frac{1}{2\pi}\omega_1$ nicht rational ist. Somit sind die $\lambda_{t_1}^{2^{2n}}$ alle verschieden. Andernfalls seien $n, m \in \mathbb{N}$ verschieden, sodass $\lambda_{t_1}^{2^{2n}} = \lambda_{t_1}^{2^{2m}}$, dann erhalten wir

$$1 = e^{i\omega_1(2^{2n}-2^{2m})}$$

und folglich ist $\omega_1(2^{2n} - 2^{2m}) = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, im Widerspruch zur Irrationalität von $\frac{1}{2\pi}\omega_1$. Insbesondere sind also die Vektoren $\pi(a_2^n)v$ allesamt Eigenvektoren von $\pi(u_{t_1})$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_{t_1}^{2^{2n}}$. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, enthält also \mathbb{C}^n eine unendliche linear unabhängige Menge. Das ist absurd.

Ähnlich argumentiert man für N^{-1} . Sei w ein gemeinsamer Eigenvektor für $\pi(N^-)$ zum Eigenwert μ_t , d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\pi(v_t)w = \mu_t w$. Wie oben berechnet man

$$\pi(v_t)\pi(a_2^{-n})w = \mu_{2^{2n}t}\pi(a_2^{-n})w$$

und somit folgt auf genau dieselbe Weise, dass $\mu_t = 1$ gelten muss für alle $t \in \mathbb{R}$.

4. Die Gruppe N bzw. die Gruppe N^- kommutiert, denn

$$u_t u_s = u_{t+s} = u_{s+t} = u_s u_t, \quad v_t v_s = v_{t+s} = v_{s+t} = v_s v_t$$

und somit kommutiert auch das Bild der Gruppen, denn nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} \pi(u_t)\pi(u_s) &= \pi(u_t u_s) = \pi(u_s u_t) = \pi(u_s)\pi(u_t), \\ \pi(v_t)\pi(v_s) &= \pi(v_t v_s) = \pi(v_s v_t) = \pi(v_s)\pi(v_t). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung die Matrizen $\pi(u_t) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ allesamt unitär und insbesondere normal sind, ist die Menge

$$\pi(N) = \{\pi(u_t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

eine kommutative Familie diagonalisierbarer Operatoren. Wie in Serie 2, Aufgabe 5 gezeigt wurde, ist somit $\pi(N)$ *simultan diagonalisierbar*, d.h. es existiert eine Basis \mathcal{B} von \mathbb{C}^n bestehend aus gemeinsamen Eigenvektoren von $\pi(N)$. Nach vorangehendem Argument sind die Eigenwerte aber alle gleich 1 und somit sind alle Elemente von $\pi(N)$ ähnlich zu I_n . Da I_n nur zu sich selber ähnlich ist, ist also $\pi(N) = \{I_n\}$. Aus demselben Grund folgt auch, dass $\pi(N^-) = \{I_n\}$. Da N und N^- die Gruppe $\text{Sl}_2(\mathbb{R})$ erzeugen, ist also $\pi(\text{Sl}_2(\mathbb{R})) = \{I_n\}$.